2013 年 6 月 8 日

「揺らぐ境界—非実在が動かす実在」を読んで いろいろ疑問が湧いた人のための補足

谷村 省吾
名古屋大学大学院情報科学研究科

1　この文章の位置付け

この文章は，日経サイエンス 2013 年 7 月号，特集「量子の地平線」pp.36-45 に掲載された記事「揺らぐ境界—非実在が動かす実在」(以下，本誌・本記事と言う) に関する補足です[1]。誌面では説明しきれなかった細かい点についての解説，とくに数学的証明や歴史に関する覚え書きを補います。また，物理学上の私見も披露します。書いているうちに，あれもこれも書きたくなり，補足のくせに，ぶくぶく膨れ上がってしまいました。

2　ベルの不等式の破れを代数的量子論で分析する

古典論によれば，S という量の平均値 $\langle S\rangle$ は

$$-2 \ \leq\ \langle S\rangle \ \leq\ 2 \tag{1}$$

というベルの不等式を満たすはずである (本誌 p.39)。一方で，量子論では

$$-2\sqrt{2} \ \leq\ \langle S\rangle \ \leq\ 2\sqrt{2} \tag{2}$$

という不等式が成立する (本誌 p.41)。実験では，ベルの不等式 (1) は成立せず，量子論の不等式 (2) が成立することが確認されている。

本誌 p.39 にベルの不等式 (1) の証明は書いた。しかし，本誌では量子論の不等式 (2) の証明には至らなかった。数式をたくさん書くことは雑誌の性格上適切ではないと思われたし，完全な証明は冗長になるので，「$1+1=\sqrt{2}$」になるような計算だけを示して，ともかく量子論の答えは古典論的計算と食い違うことを例示した。

以下では，量子論の不等式 (2) の完全な証明を書いておこう。しかも，普通の量子力学のやり方ではなく，代数的量子論 (algebraic quantum theory) の方法を使って証明しよう。

A, B, U, V は物理量であり，関係式

$$A^2 = 1, \qquad B^2 = 1, \qquad U^2 = 1, \qquad V^2 = 1, \tag{3}$$

$$BA = -AB, \qquad VU = -UV, \tag{4}$$

$$AU = UA, \qquad AV = VA, \qquad BU = UB, \qquad BV = VB \tag{5}$$

[1] `http://www.nikkei-science.com/201307_036.html`

を満たすとする。このとき

$$S = AU + AV + BU - BV \tag{6}$$

が取り得る値を決定しようというのが課題である。

まず，仮定 (3), (4) より

$$\begin{aligned}(U+V)^2 &= U^2 + UV + VU + V^2 \\ &= 1 + UV - UV + 1 \\ &= 2 \end{aligned} \tag{7}$$

がわかる。この結果は，$U+V$ が取り得る値は $\pm\sqrt{2}$ であることを示している。ここまでの議論は本誌 p.42 に示したとおり。同様に

$$\begin{aligned}(U-V)^2 &= U^2 - UV - VU + V^2 \\ &= 1 - UV + UV + 1 \\ &= 2 \end{aligned} \tag{8}$$

もわかる。また，

$$\begin{aligned}(UV)^2 &= UVUV \\ &= -UVVU \\ &= -UU \\ &= -1 \end{aligned} \tag{9}$$

を得る。この結果は，UV が取り得る値は $\pm\sqrt{-1} = \pm i$（虚数！）であることを示している。同様に

$$(AB)^2 = -1 \tag{10}$$

を得る。さらに (5) も用いると

$$\begin{aligned}(ABUV)^2 &= (AB)^2\,(UV)^2 \\ &= (-1)\times(-1) \\ &= 1 \end{aligned} \tag{11}$$

を得る。この式から $ABUV$ が取り得る値は ± 1 であることがわかる。以上の結果を踏まえて

$$S = A(U+V) + B(U-V) \tag{12}$$

の 2 乗を計算すると，

$$\begin{aligned}S^2 &= A^2(U+V)^2 + AB(U+V)(U-V) + BA(U-V)(U+V) + B^2(U-V)^2 \\ &= 2 + AB(U^2 - UV + VU - V^2) + BA(U^2 + UV - VU - V^2) + 2 \\ &= 2 + AB(1 - UV - UV - 1) - AB(1 + UV + UV - 1) + 2 \\ &= 4 - 4ABUV \end{aligned} \tag{13}$$

となる。$ABUV$ の取り得る値が ± 1 だから，S^2 の取り得る値は

$$S^2 \ = \ 4 \pm 4 \ = \ 8 \text{ または } 0 \tag{14}$$

となる。したがって S の取り得る値は

$$S \ = \ \pm\sqrt{8} \text{ または } 0 \ = \ \pm 2\sqrt{2} \text{ または } 0 \tag{15}$$

となる。よって，S の最大値は $2\sqrt{2}$，最小値は $-2\sqrt{2}$ である。S の平均値は最大値と最小値の間にあるから，不等式 (2) が成立する。（証明終わり）

2.1 初心者向けのコメント

おそらく，本記事を読んだ多くの人が，なぜ

$$S = AU + AV + BU - BV \tag{16}$$

などという量を考えるのか？この S の意味は何なのか？という疑問を抱いたであろう。S は 4 つの項からなり，3 つを足して 1 つ引くという形になっている。どうして BV だけ引き算なのか？そうすることに何か特別な意味があるのか？などと思われただろう。

まず答えやすいポイントを答えると，引き算するのは AU, AV, BU, BV のうちのどれでもよいのである。どの項をマイナスにしても結論は変わらない。ただ，どれか 1 つだけ符号を変えておくのがミソである。こうしておくと $S = A(U+V) + B(U-V)$ のように因数分解できて，U, V などに ± 1 の値を割り当てたときに S の値が ± 2 になることがわかる。そうなるように S の式を作ったのである。

では S そのものにどういう意味があるのかというと，とくに意味はない。ともかく S を計算して，これがどんな値になるか見てみましょう，というだけの話である。あえて言えば，左の粒子については物理量 A または B を測り，同時に出発した右の粒子については物理量 U または V を測って，それらの値を使って定められる S は左右の測定値の関連性（相関）の指標になる，と言える。しかし，相関の指標がほしいなら (16) の第 4 項が $+BV$ ではいけないのかと指摘されるだろう。S の式だけを見て意味付けしようとしてもしようがないのである。

指標 S そのものに意味があるのではなく，いろいろな理論（古典論，量子論，さらには量子論以外の理論）が S の値についてどんな予測をするか比べることによって，各理論の限界が見えて来ることに最大の意義がある。

かつて私も，なぜ古典論では $-2 \leq \langle S \rangle \leq 2$ という不等式が成り立ち，なぜ量子論では $-2\sqrt{2} \leq \langle S \rangle \leq 2\sqrt{2}$ が成り立つのかと疑問に思い，研究した。それで可換と非可換という差異が本質的であることに気づいたのである [1]。知りたかったのは S の意味ではなく，S の値に違いをもたらしている古典論と量子論の差異である。両者の違いが生じる仕掛けもわかったので，新しいバージョンのベル不等式も作れるようになった（本誌 p.41）。

そう言われても煮え切らない思いが残り，「$S = AU + AV + BU - BV$ というものを考えれば，証明されたとおりの結果になることはわかるが，なぜ S などというものを考えなけ

ればならないのかがわからない，そうなるように S を作っただけではないのか？」という疑念を抱く人もいるだろう。こういう問題の立て方が気に食わない，という苦情なのだろう。

この疑念に対する答えはこうだ。数学にしても物理にしても，証明・実証ができればそれでよいのであって,「そんなことを証明しなければならない理由」はないのである。不思議な結果が証明できて,「それは面白い，いままでの僕らの考え方は間違っていた，視野が狭かった」ということに気づけばよいのだ。そうしなければならない理由はないが，そうすればわかることが一つ増えるからするのである。

2.2 初心者向けのコメントその 2

突然,「物理量 A, B, U, V は (3)-(5) のような関係式を満たす」と言われても，なぜこんな関係式を認めなければいけないのか？という疑問もあり得る。

これも話せば長くなる話だが，一言で言ってしまえば，偏光や電子のスピンを記述するには，この物理量代数が一番うまくいっているのだ。回転群の表現がどうとか，リー代数がどうとか，電磁場の量子化とか，数学的な理屈をいろいろ付けることはできる。しかし，どんなにもっともらしい数学的理由を付けることができても，実験に合わなければ物理としてはおしまいだ。結局は，物理としては (3)-(5) のような物理量代数が実験と合っているという実績があるから使っている。

2.3 数学が得意な人向けのコメント

物理量代数（＝物理量全体の集合）において物理量 A と複素数 x について $(A - x1)$ が逆元を持たないとき，x を A のスペクトル値 (spectral value) という。記事の中で「物理量 A の値」と呼んでいたものは「A のスペクトル値」のことである。例えば (3) の $A^2 = 1$ は,

$$\begin{aligned} A^2 - 1 &= 0 \\ (A-1)(A+1) &= 0 \end{aligned} \tag{17}$$

と書き直せるが，この式は $(A-1)$ が零因子であること，つまり $(A-1)$ の逆元が存在しないこと意味しており，ゆえに 1 は A のスペクトル値である。また，$(A+1)$ にも逆元が存在しないので，-1 は A のスペクトル値である。このように，有限スペクトル物理量のスペクトル値を求める問題は，代数方程式の根を求める問題に帰着する。

(7) の $(U+V)^2 = 2$ からも同様に

$$\begin{aligned} (U+V)^2 - 2 &= 0 \\ (U+V-\sqrt{2})(U+V+\sqrt{2}) &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$

が導けて，$U + V$ のスペクトル値は $\pm\sqrt{2}$ であることがわかる。

その意味では，(13) の計算もまだ中途半端であった。(13) の式変形を続けて，両辺に S を掛け算すると

$$
\begin{aligned}
S^2 - 8 &= -4 - 4ABUV \\
\big(S - \sqrt{8}\,\big)\big(S + \sqrt{8}\,\big) &= -4\,(1 + ABUV) \\
\big(S - 2\sqrt{2}\,\big)\big(S + 2\sqrt{2}\,\big)\,S &= -4\,(1 + ABUV)S
\end{aligned}
\tag{19}
$$

となる。(3)-(6) を使って $ABUVS$ を計算すると

$$
\begin{aligned}
ABUVS &= ABUV(AU + AV + BU - BV) \\
&= BV - BU - AV - AU \\
&= -S
\end{aligned}
\tag{20}
$$

となるので，

$$
(1 + ABUV)S \;=\; S + ABUVS \;=\; S - S \;=\; 0. \tag{21}
$$

ゆえに (19) は

$$
\big(S - 2\sqrt{2}\,\big)\big(S + 2\sqrt{2}\,\big)\big(S - 0\big) \;=\; 0 \tag{22}
$$

となる。この式は S のスペクトル値が $2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 0$ であることを意味している。

古典論の考え方に従って，すべての物理量の値が実在していると考えると S の値は 2 または -2 になるはずであったが，量子論では S の値は $2\sqrt{2}$ または $-2\sqrt{2}$ または 0 になる。

以上の証明は，物理量の足し算・掛け算などの代数関係（＝演算関係）を多用している。こういった代数関係で結ばれた物理量が量子系に内在していると考えるのが代数的量子論の特徴である。

2.4 量子力学をよく知っている人向けのコメント

物理量 A や B は，パウリ行列 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ と 2 次の単位行列 I を使って

$$
A = \sigma_x \otimes I \tag{23}
$$

$$
B = \sigma_y \otimes I \tag{24}
$$

$$
U = I \otimes \sigma_x \tag{25}
$$

$$
V = I \otimes \sigma_y \tag{26}
$$

と書ける。パウリ行列は光子の偏光状態に関する物理量や，電子のスピンに関する物理量を表す。これらを S の定義式 (6) に代入して行列 S の固有値を計算すれば $\pm 2\sqrt{2}, 0$ という値を得る。これが通常の量子力学の計算方法である。

ところが，前節までの議論では，物理量 A, B の具体的な表現行列を用いず，ヒルベルト空間もエンタングル状態（量子もつれ, entanglement）も使わず，物理量の代数的関係 (3)-(5)

だけを使ってスペクトル値を求めた点に注意してほしい。スペクトル値は固有値とほぼ同等な概念だが,「$(A-x1)$ の逆元が物理量代数（＝すべての物理量の集合）にないとき x は A のスペクトル値である」という命題は，固有ベクトルという概念を使わずに固有値もどきのスペクトル値を定義している。スペクトル値を定めるのにヒルベルト空間なんか要らないのである。ただ，一つの物理量 A のスペクトル値を決めるためにもすべての物理量の集合を参照しなければならない点にも注意してほしい。この意味でも物理量たちは密接に関連し合っており，ヒルベルト空間よりも物理量代数の方が本質的に量子系に内在しているものだと言える。そういうふうにミクロ系を理解しようとするのが代数的量子論のアプローチである [2]。

一方で,「ベル不等式の破れは，エンタングル状態の非局所性の顕れだ」としばしば言われるが，エンタングル状態など使わなくても物理量代数だけでベル不等式が破れることはわかったのである。また，(5) に示したような $AU = UA$ という可換性は，左の粒子の物理量 A の測定は右の粒子の物理量 U の値に影響しないことを含意し，この意味での局所性は守られている。論理的には，相対論的量子論では局所性は遠く離れた物理量の可換性を意味するので，$AU = UA$ のような可換性が保証されていることをビビッドに示すために，ベル・クラウザーたちの思考実験は離れた 2 箇所での測定を考察している。しかし何らかのやり方で可換性が保証されているなら，局所性という条件は要らないのだ。

また，物理量の値の非実在性を示すもう一つの数学的事実としてコッヘン・スペッカーの定理 [3, 4, 5] が知られているが，これは局所性とはまったく関係がない。

状態ベクトルの出番があるのは，物理量の値の平均，すなわち期待値 (expectation value) を求める場面だけである。期待値を求めることは，物理量が持っているさまざまなスペクトル値の出現確率を求めることに他ならない。そう考えると，状態ベクトルというのは，物理量の測定値の出現確率を決める概念装置であり，ミクロ世界に内在する物理量をマクロ世界に顕在する測定値に変換する変換器のような役割を持っていることがわかる。

なお，現代の量子論では，物理量にはスペクトル値・期待値・弱値 (weak value) という 3 種類の値があると考えられている。スペクトル値は測定器とは無関係にミクロ系が潜在的に持っている値。期待値は測定状況が定まったときに顕在化する値。弱値は新種の概念だが，測定器と対象系を連動させて条件付けたときに顕在化する値のようなものである [6, 7, 8]。弱値はまだ研究価値や学術的評価が定まっていないが，物理学としての研究課題は多い。

2.5　専門家のためのコメント

式 (6) で定義された物理量 S のスペクトル値の上限を与えるだけなら，(4) に挙げた $BA = -AB$ などの関係式も不要である。チレルソンは，$A^2 = 1$ などの自乗に関する関係式 (3) と，$AU = UA$ などの可換関係式 (5) だけを用いて不等式

$$S \leq 2\sqrt{2} \tag{27}$$

を証明した [9]。そのため，この不等式は「チレルソン限界」とも呼ばれている。

この式は非常に緩い仮定の下で証明されているので（実質的に局所性と因果律だけを仮定している），この不等式を破るような現象や理論は非常に考えにくい。だから，現行の量

子論に代わる新しい理論を作ろうとするときは，新理論はベル不等式 (1) を破ってもよいが（むしろ破らなければならないが），必ずチレルソン限界 (27) は守らなければならない，と考えられている。

2.6　もっとマニアックなコメント

「物理量の値が実在するならば，ベルの不等式が成立する」というのがベル・クラウザーたちの定理だった。対偶命題は「ベル不等式が成立しないならば，物理量の値は実在しない」であり，これがアスペなどの実験で確認された事実である。

これで話を終わってもよいのだが，論理的には，元の命題の逆は真か？という問題を立てることもできる。つまり,「ベル不等式の成立が確認できれば，物理量の値は実在していると言ってよいか？」と問いである。これについてはファインという人が肯定的に答えている [10]。つまり,「ベル不等式の成立は，A, B, U, V の値が実在しているための必要十分条件である」ことが証明されている。この意味で，ベル不等式は実在論に対するぎりぎりの厳しい試練になっている。

本誌 p.41 のコラムで触れた谷村・磯部の不等式 [1] に関しては，この種の必要十分条件がまだ明らかになっておらず，そこにまだ研究の余地がある。

3　局所性と因果律は疑われないのか？

本誌記事では，マクロ古典物理の常識である実在概念・局所性・因果律を前提としてベル不等式を導いた。そして，実験ではベル不等式が破れていることが判明したので，実在概念・局所性・因果律のどれかは実際には成り立っていないはずだと指摘し，とくに実在概念を疑い，物理量の値の実在性を放棄しなければならないと結論した。さらに，量子論では物理量の掛け算は非可換であり，物理量の値がなくても正しい計算ができることを示した。しかし，これらの検討の過程で（本誌 p.41〜43）局所性と因果律はあまりしつこく疑わなかった。

局所性と因果律を許容して，実在性だけを疑うのはなぜか？という疑問を持たれるのも当然だと思うので，その点について説明を補っておく。

局所性と因果律に関して次のような事実が知られている：

1) 局所性と因果律はマクロな古典世界で何度も確かめられている常識である。2) ミクロ世界の物理法則である相対論的場の量子論は局所性と因果律を尊重するようにできている。3) その理論が合わない現象はない。4) 超光速粒子（もしあれば局所性と因果律を破る）は実験家たちが探しているけれども一度も見つかっていない。

以上のような理由から局所性と因果律はおいそれと放棄するわけにはいかないのである。

それに比して,「測定しなかった物理量が，測定したときと同様に測定値を持っている」という実在概念は，古典物理の世界では一度も確かめられていない信念である。字句意義からして,「測らなかった値が，測った値に等しいかどうか」は確かめようがない。だからこそ実在概念が疑われるのである。

ベルの不等式とクラウザーたちの思考実験とアスペの実験のすごいところは，局所性と因果律が正しいと仮定した上で「測らなかった値が，測ったときと同じように実在しているか」という，肯定も否定もできなさそうな問いを物理実験でテスト可能にしたところにあり，しかも否定的に答えたところにある。

局所性や因果律が成り立たない世界を想定すると，我々が住み慣れた世界とはかなり異なった世界になる。そのような理論を作ってもよいが，「何でもありな理論」になりがちだ。そのような理論はアスペ実験を説明できるかもしれないが，いままでに実現したことがない奇妙な現象（テレパシーや過去への通信など）も起こってよいという予測を与えてしまう。詳しく言うと，「アスペ実験で $2\sqrt{2}$ という値が出て来ることは説明できて，$2\sqrt{2}$ よりも大きな値は出て来ないことも説明できて，その他のとんでもない現象は予測しない，量子論以外の理論」を作るのは難しい。

科学というのは保守的な学問であり，とんでもない修正なしで済ませられるなら，それにこしたことはない。「そういう判断は常識に囚われているのではないか」と言われるかもしれないが，そのとおり，本来，物理学は常識的なのである。好き好んで非常識になっているわけではない。

私の記事でも p.41〜43 あたりで，実在概念・局所性・因果律を比較して疑っていはいるが，局所性・因果律に対する疑いを長々と書いても後が続かないし，その二つは十分確かめられているので，あっさりした扱いになっている。

「アスペ実験で $2\sqrt{2}$ という値が出て，$2\sqrt{2}$ よりも大きな値は出て来ないことを説明できる理論」があるとことは，本誌に併載された木村元氏による記事の p.50〜51 に書かれている。これが従来の量子論の数学的原理ではなく，情報に基づいた原理から説明できるという点が目新しい。木村氏の記事は，量子論のような確立されたかに見える分野に関しても，基礎原理から見直そうとする機運・挑戦があることを示している。

4　波動関数の正体をめぐって

本誌 p.42 のコラムで「私は，波動関数は対象物体に備わっているものではなく，測定者のものでもなく，対象系の物理量を測定者に見える値に変換するインターフェースだと考えている。波動関数は，ミクロとマクロの世界の地平線上にあり，古典世界から量子世界を覗き見る窓のようなものだ」と私は書いたが，この考え方の提案者の名前や初出文献を挙げることはしなかった。この種の解釈はいつ誰が最初に言い出したかということは特定しにくい。そこまで厳密な記述を求められている場面ではないと思ったので，この程度の曖昧な記述にとどめておいた。

何事につけ解釈というものは，誰でも自分なりの解釈を持つものである。しかも，解釈は，そう思っている人にとっては当たり前のことに感じられてしまい，文章に書き残される機会が少ない。また，専門用語は，日常語と同じ単語を使っていても意味がずれていることがあり，そのために話が通じないことがある。実際には，大勢の人たちが少しずつ異なることを考えて議論を積み重ねていくうちに徐々に一つの解釈体系が形成され，共通認識が広がっていくものだ。また，年月が経過して，言葉や周辺の概念が変化すると，物理学上の概念と言

えども意味内容や解釈が変容していくのは，歴史が示すところである。ときには一人の物理学者であってもいろいろな解釈の間を揺れ動く。

量子力学の，いわゆる「コペンハーゲン解釈」ですら，その詳細な内容については諸説ある。それがコペンハーゲンのボーアを中心として強化・唱導された論説であることは間違いないが，誰かが明確にコペンハーゲン解釈を条文として書いたわけでもない。

本誌のコラムに書いた波動関数の解釈にしても私のオリジナルアイディアではない。しかし，先人の貢献について何も言及しないのは不遜だと思うので，その点，説明を補っておきたい。

1947 年にシーゲル (Irving E. Segal) という数学者が，波動関数の拡張概念である「状態 (state)」はミクロ系に内在する非可換物理量をマクロ外界系で測定される値（期待値）に変換する写像だという明確な定義を与えた [11, 12, 13]。しかし，彼自身，論文の中で，この定義は本質的にワイル [14] およびフォンノイマン [15] が与えたものだと書いている。

遡れば，1926 年にシュレーディンガーは波動関数という概念を物理学に導入し，同年，ボルンは波動関数の確率解釈を提唱した [16, 17]。後日，アインシュタインが量子力学の確率解釈に不満を漏らしたことは有名だが，ボルンは 1954 年のノーベル賞受賞講演において，確率が振幅の 2 乗に比例するというアイディアはアインシュタインからヒントを得たと公言している [18]。アインシュタイン自身，光の明るさを光子の放出確率で説明するという考えを論文に示していたし，電磁場の振幅の 2 乗は光子の顕在確率に比例するだろうという考えも示していたのである。そんなアインシュタインが量子力学の確率解釈は気に食わなかったのは，まったく皮肉と言うほかない。

1926 年の時点では，シュレーディンガーは，電子は流体のようなものだと考え，波動関数は電子の電荷密度を表していると考えていたことが伝えられている [18]。つまり波動関数は実在物に近い概念だと思っていたらしい。

しかし，ボルンの確率解釈が物理学者たちに認められるようになった 1935 年には，シュレーディンガーは，後に彼の名を冠して呼ばれる猫のパラドクスを提唱した論文の中で,「波動関数とは予測目録であり，測定値の確率を予言する手段にほかならない」と書いている [19, 20]。この言い方だと，シュレーディンガーは，波動関数は原子や猫などの被観測系に備わった実体だと思っていたのか，それとも観測者の側に備わっている属性だと思っていたのか，はっきりしない。むしろ予測値を計算するための一種の通過儀礼として波動関数を捉えていたのではないかとすら思える。また，同じ論文の中で「測定によって波動関数が突発的に予見不可能な変化をすることを考えに入れると，波動関数をそのまま実在の代用物と見なすことはできない」（原文の丸写しではなく，多少語順を整えてある）と書いている。

なお,「状態はミクロとマクロの界面 (interface) の機能を果たす」という表現は小嶋泉氏の論文に初めて現れたとされている [21, 22]。たしかにこの言い回しは量子論における状態概念を的確に言い表しており，状態概念の最良の位置付けだと思われる。

いろいろ述べたが，解釈というのは，これ一つが正解と決まるものではない。かといって，どんな解釈でも受け入れてよいわけではない。まずい解釈は，現実に合わない描像を人に与えたり，不要なパラドクスを引き起こしたりするので，時を経れば排除されていくべきで

ある。

また，物理理論における解釈とは，用語・数式と現実世界とを対応づけることであり，現実世界についての表象・イメージを形作ることである。解釈とは，たんに現実現象を人間心理に投影する受動的作業ではなく，自然界にどう働きかければどういう現象が起きるかを予測する能動的な描像・思考モデルとしての役割を果たす。だから解釈は重要なのである。

確率や状態など量子力学の基本概念について私なりの解釈は別のところでも詳しく論じたので，参考にしていただきたい [23]。

参考文献

[1] T. Isobe and S. Tanimura, “A method for systematic construction of Bell-like inequalities and a proposal of a new type of test”, Progress of Theoretical Physics **124**, 191-205 (2010), arXiv: 1005.4966.

[2] 谷村省吾「21 世紀の量子論入門」。雑誌『理系への数学』（その後『現代数学』に誌名変更）2010 年 5 月号から 2012 年 4 月号まで連載された解説記事。量子力学の入門コースとして代数的量子論の講義を試みた。この連載記事は今年中に単行本化・出版の予定。

[3] S. Kochen and E. P. Specker, “The problem of hidden variables in quantum mechanics,” J. Math. Mech. **17**, 59-87 (1967).

[4] N. D. Mermin, “Hidden variables and the two theorems of John Bell,” Rev. Mod. Phys. **65**, 803-815 (1993). 「フォンノイマンの愚かな仮定 (von Neumann’s silly assumption)」という強烈な言葉でフォンノイマンの間違いを指摘している。コッヘン・スペッカーの定理のわかりやすい解説であり，それ以上に物理量の値の非実在性を示すわかりやすい例を数多く提示している。

[5] 筒井泉「量子力学の反常識と素粒子の自由意志」(岩波書店, 2011)。量子力学のパラドキシカルな側面を現代的観点からわかりやすく解説している。

[6] Y. Aharonov, D. Z. Albert, and L. Vaidman, “How the result of a measurement of a component of the spin of a spin-$\frac{1}{2}$ particle can turn out to be 100,” Phys. Rev. Lett. **60**, 1351-1354 (1988). スペクトル値が $\pm\frac{1}{2}$ しかない物理量の測定値（弱値）が 100 になることもあり得ることを示した論文。トリッキーな「なぞなぞ」のような問題提起であり，しばらくは一部のマニアの間だけで知られていたが，アハラノフが Quantum Paradoxes という本を出した 2005 年頃から次第に多くの人が注目するようになった。

[7] I. M. Duck, P. M. Stevenson, and E. C. G. Sudarshan, “The sense in which a weak measurement of a spin-$\frac{1}{2}$ particle’s spin component yields a value 100,” Phys. Rev. D **40**, 2112-2117 (1989). 上述の論文 [6] の謎解き・解説論文。

[8] 古田彩（著）／Y. アハラノフ（語り）／井元信之・横田一広（共著）『存在確率マイナス 1／宇宙の未来が決める現在／量子の “開かずの間” をのぞき見る』日経サイエンス 2009 年 10 月号 pp.22-35 （別冊日経サイエンス 186 号「実在とは何か？」(2012 年) pp.46-59 に再録 `http://www.nikkei-science.com/page/sci_book/bessatu/51186.html` ）。

粒子がある経路を通る確率が −1 だと考えるとつじつまが合う（そう考えないとつじつまが合わない）という現象が発見され，アハラノフの弱値のアイディアを使えば −1 の確率が説明できるという報告。タイトルは奇をてらっているが，弱値そのものは数学的にきちんと定義されており，物理的にも測定方法がわかってきている。

[9] B. S. Cirel'son (Tsirelson), "Quantum generalizations of Bell's inequality," Lett. Math. Phys. **4**, 93-100 (1980).

[10] A. Fine, "Hidden variables, joint probability, and the Bell inequality," Phys. Rev. Lett. **48**, 291-295 (1982).

[11] I. Gel'fand and M. Naĭmark, "On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space," Matematicheskii Sbornik **54**, 197-217 (1943) (C*-Algebras: 1943-1993, Contemp. Math. **167**, 3 (1994) に再録). 「state」という言葉は用いられていないが，[12] における state とほぼ同義の概念が用いられている。

[12] I. E. Segal, "Irreducible representations of operator algebras," Bull. Amer. Math. Soc. **53**, 73-88 (1947). 明確に state（状態）の概念が定義されている。state さえあれば，ヒルベルト空間は後付けで構成できることを示している。

[13] I. E. Segal, "Postulates for general quantum mechanics," Ann. Math. **48**, 930-948 (1947). 代数的量子論を明確に定式化した論文。[12] は数学の論文として書かれているが，こちらの論文の方が量子論の物理的意味を強く意識して書かれている。

[14] H. Weyl, The Theory of Groups and Quantum Mechanics (Dover, 1950). ドイツ語の初版は 1928 年。p.74 以降，第 7 節：The Conceptual Structure of Quantum Mechanics で state の概念が議論されている。1926 年に物理理論としての量子力学はほぼ出来上がり，その後は解釈と応用の研究が続くのだが，ワイルの本が書かれた年代には量子力学の数学的内容はほぼ理解されていたというスピード感は，現代の目から見て驚きである。この本の中でワイルはシュワルツ不等式を用いて位置と運動量の不確定性関係を証明している。この本を英訳したロバートソン (Robertson) は 1929 年に任意の物理量の不確定性関係を証明した。

[15] J. v. ノイマン「量子力学の数学的基礎」(みすず書房, 1957 年)。ドイツ語の初版は 1932 年。第 3 章以降のほとんどの部分は，測定と解釈に関する議論に費やされている。タイトルどおり量子力学の確固たる数学的基礎を提示しようというフォンノイマンの意気込みが感じられる本だが，意外に「数学的な本」ではない。つまり，「最初に公理と定義を掲げて，あとは淡々と定理・証明を列挙する」という公理主義的スタイルを採っておらず，物理的考察に多くの紙数を割いている。その分，物理学者の目から見るとつっこみどころが多く，いま見ると間違っている箇所もあり，それがまたこの本の魅力になっている。

[16] M. Born, "Zur Quantenmechanik der Stossvorgänge," Z. Phys. **37**, 863-867 (1926). p.865 の脚注に「校正刷りで付け足した註」として，「より注意深く考察すると，確率は波動関数の展開係数の 2 乗に比例することがわかる」と書かれている。原文はドイツ語だが，英語訳が J. A. Wheeler and W. H. Zurek, Quantum Theory and Measurement (Princeton Univ Press, 1984) に収められている。

[17] M. Born, "Quantenmechanik der Stossvorgänge," Z. Phys. **38**, 803-827 (1926). 量子力学の散乱問題を定式化した論文。p.805 (4) 式あたりに確率解釈がはっきり表れている。

[18] M. Born, "The statistical interpretation of quantum mechanics," Nobel Lecture (1954). ノーベル財団の web page に講演原稿が公開されている。`http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1954/born-lecture.html` なお，ボルン自身は probability interpretation（確率解釈）ではなく，statistical interpretation（統計解釈）と言っている。

[19] シュレーディンガー『量子力学の現状』，湯川・井上編「現代の科学 II」（世界の名著，第 66 巻）pp.357-408 (中央公論社, 1970)。原文は 1935 年版。いわゆる「シュレーディンガーの猫のパラドクス」を初めて論じた論文。p.377, 第七節には「予測目録としての ψ 関数」という見出しが付けられ，本文には「ψ 関数とは，測定値の確率を予言する手段にほかならない」と書かれている。

[20] 湯川秀樹・江沢洋編著「岩波講座現代物理学の基礎（第 2 版）量子力学 II」(岩波書店, 1978), 16.1 節, p.256 に「状態とは予測目録 (Erwartungskatalog) である」と書かれている。

[21] 小嶋泉・岡村和哉「無限量子系の物理と数理」(サイエンス社, 2013), p.13. これも特徴があって興味深い本なのだが,「引用する＝この本に書かれていることすべてを支持している」と思われても困るので断っておくと，p.124 の，光子は媒質中で有効質量を獲得して局在化するという説は，多々難点があり，見当違いの説と思われる。原理的な問題としては，気体や固体などの媒質は静止系が定義できる系であり，ポアンカレ対称性もガリレイ対称性も破れているので，ポアンカレ群表現・ガリレイ群表現のいずれの意味でも光子の質量は定義できないし，どちらに依拠した局在化定理も意味をなさない，という難点がある。

[22] I. Ojima, "Micro-macro duality in quantum physics," pp.143-161, in Proc. Intern. Conf. "Stochastic Analysis: Classical and Quantum—Perspectives of White Noise Theory" ed. by T. Hida (World Scientific, 2005), arXiv: math-ph/0502038.

[23] 谷村省吾「21 世紀の量子論入門—第 15 回：観測問題の基本概念」理系への数学 2011 年 7 月号 pp.56-61（現代数学社）。