

# 『アインシュタインの夢 ついえる：測っていない値は実在しない』 を読んで、もっと理解したいと思った人のための補足解説

谷村 省吾

名古屋大学大学院情報学研究科

## 1 この文章の位置付け

この文章は、日経サイエンス 2019年2月号、特集「量子もつれ実証」[1, 2]に掲載された記事『アインシュタインの夢 ついえる—測っていない値は実在しない』（以下、本誌・本記事と言う）に対する補足解説です。本誌面では説明しなかった詳細、とくに数学的証明と歴史に関する解説を補います。一度に全部の論点について解説を書き切れないので、何回かに分けて公表しようと思います。

先に公開した第1版には、第2節（ベルの不等式の復習）、第3節（量子論の正しい計算）、第4節（量子論で負の確率を求める）を書きました。この第2版には、新たに第5節（確率の解釈についての諸説）、第6節（量子論における確率の解釈）、第7節（波動関数のよりよい解釈を求めて）、第8節（負の確率の弱値解釈）を加えました。どの節も独立性が高いので、興味を持った節だけでも読んでいただければと思います。PDF ファイルには節ごとにしおりを付けてあります。

また、本記事を読んでいただいた方から twitter<sup>1</sup>などを通してご質問を寄せていただければ、答えを公表するのが適切な場合には、追加の補足解説の中で私が答えられる範囲でお答えしたいと思います。

## 2 ベルの不等式の復習

ベルの不等式は次のように述べられる。 $A, B, U, V$  という4種類の物理量があるとする。これらを測ると1または-1のどちらかの値が得られる。 $\pm 1$ の値はランダムに現れるように見える。「 $A$ の値は $a$ であり（ $a$ には1か-1があてはまる）、かつ、 $B$ の値は $b$ であり、かつ、 $U$ の値は $u$ であり、かつ、 $V$ の値は $v$ である確率 $P(a, b, u, v)$ が0以上1以下の実数値として存在していること」を仮定する。

物理量 $A, B, U, V$ のうち、 $A$ と $U$ 、あるいは $A$ と $V$ 、あるいは $B$ と $U$ 、あるいは $B$ と $V$ の組は一度に測ることができる。実験状況としては、似たような（同じ確率分布に従うと思われる）粒子系を繰り返し生成し、例えば $A$ と $U$ の値を同時に測って（厳密に同時である必要はない）、測定値を掛け算して $AU$ の値を求める。粒子系が生成されるたびに同様の測

<sup>1</sup>Twitter アカウント：tani6s

定を行う。測定ごとに  $A$  と  $U$  の値は  $\pm 1$  のどちらかに揺れており、掛け算  $AU$  の値も  $1$  であったり  $-1$  であったりするが、そのような測定結果を集めて  $AU$  の平均値  $\langle AU \rangle$  を求める。測定する物理量の組を替えて、同様に、平均値  $\langle AV \rangle$ ,  $\langle BU \rangle$ ,  $\langle BV \rangle$  も求める。これらを足したり引いたりして

$$\langle S \rangle := \langle AU \rangle + \langle AV \rangle + \langle BU \rangle - \langle BV \rangle \quad (2.1)$$

を定める。以上の前提のもとで

$$-2 \leq \langle S \rangle \leq 2 \quad (2.2)$$

が成り立つ。これをベルの不等式、あるいは、CHSH の不等式という。

この不等式の証明は、本誌にも書いたし、前作の補足解説 [3] (“「揺らぐ境界—非実在が動かす実在」を読んでいろいろ疑問が湧いた人のための補足”の 3.3 節)にも書いたので、ここには繰り返さない。ただ、ベルの不等式自体の証明は簡単明瞭で、一度納得したら、この不等式が成り立たないことがあるとは思えないくらいである。

### 3 量子論の正しい計算

量子論においては、物理量は線形演算子(行列)で表され、物理系の状態はヒルベルト空間の単位ベクトルまたは密度行列で表される。「表される」という言葉には解釈が必要なのだが、それは追って説明することにする。

スピンという物理量は、測れば  $1$  か  $-1$  のどちらかの値を示すものである。量子力学では  $1$  個の粒子のスピンはパウリ行列と呼ばれる  $3$  通りの行列

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

で表される。これらの行列はどれも固有値が  $\pm 1$  である。また、 $2$  行  $2$  列の単位行列

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

を定めておくと便利である。 $2$  個の粒子のスピンは、こういった行列のテンソル積で表される。とくにベルの不等式の検証の際に選ばれる物理量は

$$A = \sigma_z \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

$$B = \sigma_x \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

$$U = I_2 \otimes \frac{-1}{\sqrt{2}}(\sigma_z + \sigma_x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$V = I_2 \otimes \frac{-1}{\sqrt{2}}(\sigma_z - \sigma_x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

と表現される。これらの行列の固有値もまた  $\pm 1$  である。注目してほしい点は、行列の積に関して  $AB = BA$  が成り立たないし、 $UV = VU$  も成り立たないという点である。数学的には、 $A$  と  $B$  は非可換であり、同時固有ベクトルが存在しない。このことは物理的には  $A$  と  $B$  の値が同時に確定している状態はないと解釈される。同様に、 $U$  と  $V$  の値が同時に確定している状態もない。

一方で  $A$  と  $U$  の行列の積に関しては  $AU = UA$  が成り立つ。だから  $A$  と  $U$  の値が同時に確定している状態が存在するし、 $A$  と  $U$  の値を同時測ったときの測定値の出現確率を計算することもできる。同様に  $AV = VA$ ,  $BU = UB$ ,  $BV = VB$  も成り立つ。非可換なのは  $A$  と  $B$ ,  $U$  と  $V$  だけである。

量子論における確率計算の方法を示す。 $A$  の測定値が  $a$  かつ  $U$  の測定値が  $u$  となる確率を  $P_{AU}(a, u)$  と書く。変数  $a, u$  には  $1$  または  $-1$  があてはまる。 $a = \pm 1$  なので  $a^2 = 1$  とし てよい。ここで

$$\Pi_A(a) := \frac{A + a}{a + a} = \frac{1}{2}(aA + 1) \quad (3.7)$$

とおくと、 $A$  の値が  $a$  ならば  $\Pi_A(a) = 1$  であるし、 $A$  の値が  $-a$  ならば  $\Pi_A(a) = 0$  である。同様に

$$\Pi_U(u) := \frac{U + u}{u + u} = \frac{1}{2}(uU + 1) \quad (3.8)$$

を定めておく。粒子系の状態ベクトルを  $|\Psi\rangle$  とする。量子論は確率  $P_{AU}(a, u)$  を

$$\begin{aligned} P_{AU}(a, u) &= \langle \Psi | \Pi_A(a) \Pi_U(u) | \Psi \rangle \\ &= \frac{1}{2^2} \langle \Psi | (1 + aA)(1 + uU) | \Psi \rangle \end{aligned} \quad (3.9)$$

で与える。同様に、

$$\Pi_B(b) := \frac{B + b}{b + b} = \frac{1}{2}(bB + 1), \quad \Pi_V(v) := \frac{V + v}{v + v} = \frac{1}{2}(vV + 1) \quad (3.10)$$

とおけば、 $A$  の測定値が  $a$  かつ  $V$  の測定値が  $v$  となる確率  $P_{AV}(a, v)$ ,  $B$  の測定値が  $b$  かつ  $U$  の測定値が  $u$  となる確率  $P_{BU}(b, u)$ ,  $B$  の測定値が  $b$  かつ  $V$  の測定値が  $v$  となる確率

$P_{BV}(b, v)$  は, それぞれ

$$P_{AV}(a, v) = \langle \Psi | \Pi_A(a) \Pi_V(v) | \Psi \rangle = \frac{1}{2^2} \langle \Psi | (1 + aA)(1 + vV) | \Psi \rangle \quad (3.11)$$

$$P_{BU}(b, u) = \langle \Psi | \Pi_B(b) \Pi_U(u) | \Psi \rangle = \frac{1}{2^2} \langle \Psi | (1 + bB)(1 + uU) | \Psi \rangle \quad (3.12)$$

$$P_{BV}(b, v) = \langle \Psi | \Pi_B(b) \Pi_V(v) | \Psi \rangle = \frac{1}{2^2} \langle \Psi | (1 + bB)(1 + vV) | \Psi \rangle \quad (3.13)$$

から計算できる。

具体的な計算を完了するためには状態ベクトル  $|\Psi\rangle$  を指定する必要がある。 $\sigma_z$  の固有値 1 あるいは  $-1$  に属する固有ベクトルを「スピン上向き」あるいは「スピン下向き」の状態といい、それぞれ

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

と書く。ベルの不等式の検証実験では

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.15)$$

という 2 粒子状態が用意される。これこそが、量子もつれ状態（エンタングル状態）と呼ばれるものである。あとは確率の定義式 (3.9), (3.11), (3.12), (3.13) に各物理量の定義式 (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) と状態ベクトルの式 (3.15) を入れれば、それぞれの確率を求められる。確率  $P_{AU}(a, u)$  の式を展開すると

$$\begin{aligned} P_{AU}(a, u) &= \langle \Psi | \Pi_A(a) \Pi_U(u) | \Psi \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \langle \uparrow | \Pi_A(a) | \uparrow \rangle \langle \downarrow | \Pi_U(u) | \downarrow \rangle - \langle \uparrow | \Pi_A(a) | \downarrow \rangle \langle \downarrow | \Pi_U(u) | \uparrow \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle \downarrow | \Pi_A(a) | \uparrow \rangle \langle \uparrow | \Pi_U(u) | \downarrow \rangle + \langle \downarrow | \Pi_A(a) | \downarrow \rangle \langle \uparrow | \Pi_U(u) | \uparrow \rangle \right\} \\ &= \frac{1}{2^3} \left\{ (1+a) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}u\right) - (0+0) \cdot \left(0 - \frac{1}{\sqrt{2}}u\right) \right. \\ &\quad \left. - (0+0) \cdot \left(0 - \frac{1}{\sqrt{2}}u\right) + (1-a) \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}u\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2^3} \left\{ (1+a) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}u\right) + (1-a) \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}u\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2^2} \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}au \right\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

となる。関数値を具体的に計算すると

$$P_{AU}(1,1) = P_{AU}(-1,-1) = \frac{1}{2^2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2 + \sqrt{2}}{2^3} = 0.42677 \dots \quad (3.17)$$

$$P_{AU}(1,-1) = P_{AU}(-1,1) = \frac{1}{2^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{2^3} = 0.07322 \dots \quad (3.18)$$

となる。この計算結果が本記事 p.69 の左の表に掲載されている。他の物理量の組み合わせに対する測定値の出現確率の式も大した違いはない：

$$\begin{aligned} P_{AV}(a,v) &= \langle \Psi | \Pi_A(a) \Pi_V(v) | \Psi \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \langle \uparrow | \Pi_A(a) | \uparrow \rangle \langle \downarrow | \Pi_V(v) | \downarrow \rangle - \langle \uparrow | \Pi_A(a) | \downarrow \rangle \langle \downarrow | \Pi_V(v) | \uparrow \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle \downarrow | \Pi_A(a) | \uparrow \rangle \langle \uparrow | \Pi_V(v) | \downarrow \rangle + \langle \downarrow | \Pi_A(a) | \downarrow \rangle \langle \uparrow | \Pi_V(v) | \uparrow \rangle \right\} \\ &= \frac{1}{2^3} \left\{ (1+a) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}v\right) - (0+0) \cdot \left(0 + \frac{1}{\sqrt{2}}v\right) \right. \\ &\quad \left. - (0+0) \cdot \left(0 + \frac{1}{\sqrt{2}}v\right) + (1-a) \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}v\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2^3} \left\{ (1+a) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}v\right) + (1-a) \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}v\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2^2} \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}av \right\}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} P_{BU}(b,u) &= \langle \Psi | \Pi_B(b) \Pi_U(u) | \Psi \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \langle \uparrow | \Pi_B(b) | \uparrow \rangle \langle \downarrow | \Pi_U(u) | \downarrow \rangle - \langle \uparrow | \Pi_B(b) | \downarrow \rangle \langle \downarrow | \Pi_U(u) | \uparrow \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle \downarrow | \Pi_B(b) | \uparrow \rangle \langle \uparrow | \Pi_U(u) | \downarrow \rangle + \langle \downarrow | \Pi_B(b) | \downarrow \rangle \langle \uparrow | \Pi_U(u) | \uparrow \rangle \right\} \\ &= \frac{1}{2^3} \left\{ (1+0) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}u\right) - (0+b) \cdot \left(0 - \frac{1}{\sqrt{2}}u\right) \right. \\ &\quad \left. - (0+b) \cdot \left(0 - \frac{1}{\sqrt{2}}u\right) + (1+0) \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}u\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2^3} \left\{ \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}u\right) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}u\right) + 2b \frac{1}{\sqrt{2}}u \right\} \\ &= \frac{1}{2^2} \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}bu \right\}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} P_{BV}(b,v) &= \langle \Psi | \Pi_B(b) \Pi_V(v) | \Psi \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \langle \uparrow | \Pi_B(b) | \uparrow \rangle \langle \downarrow | \Pi_V(v) | \downarrow \rangle - \langle \uparrow | \Pi_B(b) | \downarrow \rangle \langle \downarrow | \Pi_V(v) | \uparrow \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle \downarrow | \Pi_B(b) | \uparrow \rangle \langle \uparrow | \Pi_V(v) | \downarrow \rangle + \langle \downarrow | \Pi_B(b) | \downarrow \rangle \langle \uparrow | \Pi_V(v) | \uparrow \rangle \right\} \\ &= \frac{1}{2^3} \left\{ (1+0) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}v\right) - (0+b) \cdot \left(0 + \frac{1}{\sqrt{2}}v\right) \right. \\ &\quad \left. - (0+b) \cdot \left(0 + \frac{1}{\sqrt{2}}v\right) + (1+0) \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}v\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2^3} \left\{ \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}v\right) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}v\right) - 2b \frac{1}{\sqrt{2}}v \right\} \\ &= \frac{1}{2^2} \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}bv \right\}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

従って  $P_{BV}(b, v)$  の式だけが他の式とは同型ではない。確率の値は

$$P_{BV}(1, 1) = P_{BV}(-1, -1) = \frac{1}{2^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{2^3} = 0.07322 \dots \quad (3.22)$$

$$P_{BV}(1, -1) = P_{BV}(-1, 1) = \frac{1}{2^2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2 + \sqrt{2}}{2^3} = 0.42677 \dots \quad (3.23)$$

となる。同時測定可能な物理量については測定値の出現確率が負になることはない。

ここまで来れば、各物理量の平均値を求めることはたやすい。確率  $P_{AU}(a, u)$  の式 (3.16) より  $AU$  の平均値は

$$\langle AU \rangle = \sum_{a,u=\pm 1} au P_{AU}(a, u) = \sum_{a,u=\pm 1} au \frac{1}{2^2} \left\{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} au\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.70710 \dots \quad (3.24)$$

となる。 $\langle AV \rangle$ ,  $\langle BU \rangle$  もこれと同じ値である。確率  $P_{BV}(b, v)$  の式 (3.21) より  $BV$  の平均値は

$$\langle BV \rangle = \sum_{b,v=\pm 1} bv P_{BV}(b, v) = \sum_{b,v=\pm 1} bv \frac{1}{2^2} \left\{1 - \frac{1}{\sqrt{2}} bv\right\} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -0.70710 \dots \quad (3.25)$$

となる。これらより、式 (2.1) で定めた  $\langle S \rangle$  の値は

$$\langle S \rangle = \langle AU \rangle + \langle AV \rangle + \langle BU \rangle - \langle BV \rangle = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} = 2.82842 \dots \quad (3.26)$$

となる。これが量子論的に正しい結果であるが、ベルの不等式 (2.2),  $-2 \leq \langle S \rangle \leq 2$  の範囲外の値になっている。

なお、古典論では  $S$  の値は  $\pm 2$  になり、量子論では  $S$  の値は  $0$  または  $\pm 2\sqrt{2}$  になることは、ヒルベルト空間を用いない代数的方法だけでも証明できる [4]。

## 4 量子論で負の確率を求める

量子論の式を変則的に用いれば、同時測定不可能な物理量についても値の“存在確率”を定めることができる。ただ、そのような物理量の組の測定は原理的にできないので、「測定値の出現確率」と呼ぶのは不適當である。そういう意味では、いまから計算するものは「確率もどき」と呼ぶのがふさわしいかもしれない。

そのような“反則”を覚悟して、「 $A$  の値が  $a$ 、かつ  $B$  の値が  $b$ 、かつ  $U$  の値が  $u$ 、かつ  $V$  の値が  $v$ 」となる確率  $P_{ABUV}(a, b, u, v)$  の定義式として

$$\begin{aligned} P_{ABUV}(a, b, u, v) &:= \langle \Psi | \Pi_A(a) \Pi_B(b) \Pi_U(u) \Pi_V(v) | \Psi \rangle \\ &= \frac{1}{2^4} \langle \Psi | (1 + aA)(1 + bB)(1 + uU)(1 + vV) | \Psi \rangle \\ &= \frac{1}{2^4} \langle \Psi | (1 + aA + bB + abAB)(1 + uU + vV + uvUV) | \Psi \rangle \quad (4.1) \end{aligned}$$

を提案する。この式は (3.9) の自然な拡張になっている。しかも, すでに定義した (3.9), (3.11), (3.12), (3.13) に対して

$$\sum_{b=\pm 1} \sum_{v=\pm 1} P_{ABUV}(a, b, u, v) = P_{AU}(a, u), \quad (4.2)$$

$$\sum_{b=\pm 1} \sum_{u=\pm 1} P_{ABUV}(a, b, u, v) = P_{AV}(a, v), \quad (4.3)$$

$$\sum_{a=\pm 1} \sum_{v=\pm 1} P_{ABUV}(a, b, u, v) = P_{BU}(b, u), \quad (4.4)$$

$$\sum_{a=\pm 1} \sum_{u=\pm 1} P_{ABUV}(a, b, u, v) = P_{BV}(b, v) \quad (4.5)$$

が成り立っているので, 形式的には,  $P_{ABUV}(a, b, u, v)$  は  $P_{AU}(a, u)$ ,  $P_{AV}(a, v)$ ,  $P_{BU}(b, u)$ ,  $P_{BV}(b, v)$  を周辺確率とする結合確率になっている。ただ, 射影演算子の積  $\Pi_A(a)\Pi_B(b)$  は射影演算子ではないので,  $P_{ABUV}(a, b, u, v)$  が非負の実数値になる保証はないし,  $\Pi_A(a)\Pi_B(b) \neq \Pi_B(b)\Pi_A(a)$  なので  $\langle \Psi | \Pi_A(a)\Pi_B(b)\Pi_U(u)\Pi_V(v) | \Psi \rangle$  と  $\langle \Psi | \Pi_B(b)\Pi_A(a)\Pi_U(u)\Pi_V(v) | \Psi \rangle$  は等しいとは言えない。それに対して,  $\Pi_A(a)\Pi_U(u)$  は射影演算子であり,  $\Pi_A(a)\Pi_U(u) = \Pi_U(u)\Pi_A(a)$  が成り立ち,  $\langle \Psi | \Pi_A(a)\Pi_U(u) | \Psi \rangle = \langle \Psi | \Pi_U(u)\Pi_A(a) | \Psi \rangle$  は非負の実数値となる。

計算途中に現れる演算子は

$$AB = (\sigma_z \sigma_x) \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

$$UV = I_2 \otimes \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x)(\sigma_z - \sigma_x) = -I_2 \otimes (\sigma_z \sigma_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

である。状態ベクトルは (3.15) として, 確率もどきの式 (4.1) を展開すると

$$\begin{aligned} P_{ABUV}(a, b, u, v) &= \frac{1}{2^5} \left\{ \langle \uparrow | (1 + aA + bB + abAB) | \uparrow \rangle \langle \downarrow | (1 + uU + vV + uvUV) | \downarrow \rangle \right. \\ &\quad - \langle \uparrow | (1 + aA + bB + abAB) | \downarrow \rangle \langle \downarrow | (1 + uU + vV + uvUV) | \uparrow \rangle \\ &\quad - \langle \downarrow | (1 + aA + bB + abAB) | \uparrow \rangle \langle \uparrow | (1 + uU + vV + uvUV) | \downarrow \rangle \\ &\quad \left. + \langle \downarrow | (1 + aA + bB + abAB) | \downarrow \rangle \langle \uparrow | (1 + uU + vV + uvUV) | \uparrow \rangle \right\} \\ &= \frac{1}{2^5} \left\{ (1 + a + b0 + ab0) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}u + \frac{1}{\sqrt{2}}v + uv0\right) \right. \\ &\quad - (0 + a0 + b + ab) \cdot \left(0 - \frac{1}{\sqrt{2}}u + \frac{1}{\sqrt{2}}v + uv\right) \\ &\quad - (0 + a0 + b - ab) \cdot \left(0 - \frac{1}{\sqrt{2}}u + \frac{1}{\sqrt{2}}v - uv\right) \\ &\quad \left. + (1 - a + b0 + ab0) \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}u - \frac{1}{\sqrt{2}}v + uv0\right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^5} \left\{ (1+a) \cdot \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}u + \frac{1}{\sqrt{2}}v \right) \right. \\
&\quad - (b+ab) \cdot \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}u + \frac{1}{\sqrt{2}}v + uv \right) \\
&\quad - (b-ab) \cdot \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}u + \frac{1}{\sqrt{2}}v - uv \right) \\
&\quad \left. + (1-a) \cdot \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}u - \frac{1}{\sqrt{2}}v \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2^4} \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}a(u+v) + \frac{1}{\sqrt{2}}b(u-v) - abuv \right\} \tag{4.8}
\end{aligned}$$

となる。例えば  $a = 1, b = 1, u = -1, v = -1$  となる確率は,

$$\begin{aligned}
P_{ABUV}(1, 1, -1, -1) &= \frac{1}{2^4} \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 + 0 - 1 \right\} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2^4} = -0.08838 \dots \tag{4.9}
\end{aligned}$$

のとおり, 負の値になる。式 (4.8) は

$$P_{ABUV}(a, b, u, v) = \frac{1}{2^4} \left\{ 1 - abuv + \frac{1}{\sqrt{2}}(au + av + bu - bv) \right\} \tag{4.10}$$

とも書ける。 $au + av + bu - bv = 2$  かつ  $abuv = 1$  の場合は

$$P_{ABUV}(a, b, u, v) = \frac{1}{2^4} \left\{ 1 - 1 + \frac{2}{\sqrt{2}} \right\} = \frac{\sqrt{2}}{2^4} = 0.08838 \dots, \tag{4.11}$$

$au + av + bu - bv = 2$  かつ  $abuv = -1$  の場合は

$$P_{ABUV}(a, b, u, v) = \frac{1}{2^4} \left\{ 1 + 1 + \frac{2}{\sqrt{2}} \right\} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2^4} = 0.21338 \dots, \tag{4.12}$$

$au + av + bu - bv = -2$  かつ  $abuv = 1$  の場合は

$$P_{ABUV}(a, b, u, v) = \frac{1}{2^4} \left\{ 1 - 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} \right\} = -\frac{\sqrt{2}}{2^4} = -0.08838 \dots, \tag{4.13}$$

$au + av + bu - bv = -2$  かつ  $abuv = -1$  の場合は

$$P_{ABUV}(a, b, u, v) = \frac{1}{2^4} \left\{ 1 + 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} \right\} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2^4} = 0.03661 \dots \tag{4.14}$$

となる。確率  $P_{ABUV}(a, b, u, v)$  が負になるのは  $au + av + bu - bv = -2$  かつ  $abuv = 1$  の場合に限られることがわかる。こうして本記事 p.69 の右の表のすべての確率が計算できた。

式 (4.10) と周辺確率の定義式 (4.2), (4.3), (4.4), (4.5) から, 量子論で求めた式 (3.16), (3.19), (3.20), (3.21) が再現できる。

## 5 確率の解釈についての諸説

確率という概念は便利であるが, そもそも確率とは何なのか, 確率は何を表しているのかという問いは, なかなか奥が深く, 確率の意味するところを論ずる「確率の哲学」と呼ばれ



る哲学の分野があるほどである [5]。確率は、数値化できて、使い方は簡単で、いろいろな場面で使えて、すぐに意味がわかったような気になるが、目に見える実体ではないし、温度計や電流計のような「それ専用の測定器」もなく、意味は一つではなく、いろいろな解釈が可能、という特質において飛び抜けている。このような特質を備えた数理概念は、確率の他には、エントロピーがあるだろうか。確率そのものの解釈についても諸説があり [5]、それら諸説を列挙・比較するだけでも面白いので、私なりの言葉で紹介しておこう。

確率の解釈論は大きく二派に分かれる。一つの派は、(A) 認識論的 (epistemological) 確率論の立場である。これは「確率は、客観的なものではなく、我々人間の世界認識の様式である」と考える立場である。もう一つの派は、(B) 客観的 (objective) 確率論の立場である。これは「物質の質量や電荷が人為に依らず客観的に存在していると信じられるように、確率も客観的に存在している」と考える立場である。

さらに両派はいくつかの説に分かれる。認識論的確率論の分派として以下の説がある。

(A-1) 論理説 (logical) : 確率は正しさの<sup>どあい</sup>度合であると考えられる立場。確率は各命題に割り当てられる  $0 \leq p \leq 1$  の範囲内の実数値  $p$  である。確率  $p = 1$  を割り当たられた命題は真であり、 $p = 0$  の命題は偽である。 $p$  の値が 1 に近ければ命題が真である度合が高いとみなす。論理説が、人為的あるいは恣意的な香りのする認識論派に分類されるのは奇妙な気もするが、確率は「命題の正しさ」を評価する指標の一つだと思えば、確率は認識の方法だと言っても悪くない気がする。

(A-2) 主観説 (subjective) : 確率は各個人の信念・知識・確信の度合であると考えられる立場。この立場では、主体者の知識が増えれば、それに応じて確率の値が更新されることは、ごく自然なことだと考えられる。この発想は、ベイズ統計と相性がよい。ベイズ確率・ベイズ推定・ベイズ統計などいろいろな呼称はあるが、いずれも「観測前に確率を予測しておいて、収集した観測データにもとづいて確率の見積り値を更新する」という発想にもとづいた方法論を指している。

客観的確率論の分派としては以下の説がある。

(B-1) 頻度説 (frequency) : 同じ条件で試行 (実験・観察) を多数回、繰り返したとき、ある事象が出現する回数の全試行回数に対する割合を確率は表しているとする立場。これは確率の素朴な定義とも言える。例えば「コインが表を向く確率は  $\frac{1}{2}$  だ」という主張は、100 回コインを投げれば表が出る回数は 50 回前後だろうという意味に解釈される。頻度説は統計解釈とも呼ばれ、確率概念を導入する動機付けにもなっている。頻度説は「同等に確からしい事象を数え上げて、全事象数に対する、注目される事象の数の割合によって出現頻度を見積もる」という確率の計算規則を正当化すると考えられる。ただ、確率値を定める前に「同等に確からしい」という等確率の仮定を持ち込むことは循環論法になっているのではないか、という悩みが付きまとう。そのような基礎づけはともかくとしても、頻度説は実践的には有用である。物理学や生物学では、多数の個物・個体 (原子や分子や星や生物個体など) からなる集団の平均的性質を測定・推定することがしばしばあり、頻度説は、多数対象の測定操作をなぞらえたものとみなすことができる。事象全体の集合が有限集合であれば、集合の元を数え上げることによって確率の値を決定できるので、頻度説は集合論との相性がよ



や社会科学のさまざまな分野に浸透し、とくに科学研究を専門としない人でも確率をわかった気になれる理由であろう。確率の意味を、例えば「頻度」の意味だけに限定してしまったら、使い勝手の悪い概念になってしまっていたらう。

それぞれの解釈説について私の感想を付け加えよう。私自身は、間主観説が最も受け入れにくい。間主観説は「確率は、個人の信念ではなく、客観物でもなく、集団の合意における確信度だ」と言っているわけだが、我々は、社会集団で協議してものごとの確信度を決めているわけではない。個々人は、確率のおおよその概念と計算方法を学習したら、あとは他人に相談もせずに確率を算出している。間主観説は、確率論の運用の実態を無視した、想像上の学説であるように思える。

また、論理説は、実験や信念や潜在能力といった外的要因に訴えるのではなしに、命題そのものの「正しさ」を確率を用いて表そうという内向的態度において、他の解釈とは異なった特徴を備えている。論理説の確率解釈は、0か1か（偽か真か）だけの二値論理を、0以上1以下の多値論理に置き換えた構造として確率を捉えており、数学的構造が明瞭だと言える。

統計学における仮説検定という方法は、確率を論理的に解釈すると理解しやすい。仮説検定では、統計データ  $D$  にもとづいて「ある命題  $H$  が間違っている」ということを主張したいときに、 $H$  が正しいと仮定してデータ  $D$  が出現する確率  $p$  を算出する。確率  $p$  が100分の1以下とか、1万分の1以下とか、非常に小さい値であれば「命題  $H$  は間違っている」と断言はできないにしても、「命題  $H$  は信じ難い」と考えられる。こういう場合、命題  $H$  を棄却する。否定はできないが、「捨てる」「棄却する」という言い方になる。

統計学の仮説検定は、論理学の背理法を拡張したものだとも言える。背理法は、ある命題  $H$  が正しいと仮定して、そこから矛盾を導くことによって、 $H$  が誤りであることを証明する論法である。図式的に書くと、

$$\begin{aligned} & \text{命題 } H \text{ が真だと仮定する} \Rightarrow \text{偽命題 (矛盾) } D \text{ が導かれる} \\ & \text{だから } H \text{ は偽だ} \end{aligned} \tag{5.2}$$

という論法が背理法である。一方で仮説検定は

$$\begin{aligned} & \text{命題 } H \text{ が真だと仮定する} \Rightarrow \text{観測データ } D \text{ が実現する確率は非常に小さい} \\ & \text{だから } H \text{ は信じられない ( } H \text{ を棄却する) } \end{aligned} \tag{5.3}$$

というパターンになっている。背理法で言うところの偽命題は真理値  $p = 0$  であるが、それは仮説検定では小さな確率値 ( $p < 0.01$  など) で置き換えられている。つまり、仮説検定は、背理法を緩めた構造になっている。こうして見ると、仮説検定は、確率を「拡張された真理値」として扱っていると言える。

しかし、量子論に限らず、科学における確率は、実験を繰り返して得られる統計データ、あるいは多数の個体からなる集団系の平均的物理量を測定して得られるデータによって検証されるのが普通である。例えば「降水確率は30パーセント」という言明を傾向解釈で解したとしても、この予報がどの程度当たっているか検証しようと思ったら、降水確率30パーセントと予報された日の実測データを集めて、実際に雨が降った日数は何パーセントあった

かを調べるだろう。つまり、確率に関していかなる解釈を採用したとしても、現実と照らし合わせて「確率値の正しさ」を検討しようと思ったら、統計以外の方法はないと思われる。従って、論理説や傾向説の確率も、顕在化・検証という段階では頻度解釈の力を借りているように思える。

## 6 量子論における確率の解釈

量子論の確率概念には、どの解釈説が適合するか考えてみよう。この節は、主に私の考えを披露するものであって、物理学者全体が合意した意見の記述ではないことをあらかじめ断っておく。この点に関して自己弁護を申し立てることをお許しいただきたい。一介の物理学者たる者が私見を科学誌のウェブサイトで発表してよいのか？という議論を呼ぶかもしれないが、さまざまな公式・非公式の媒体を通して私見を発表することは、いまや物理学者も普通に行っていることだと思う。

昔は不特定多数の読者に意見を伝える方法は本・雑誌・新聞くらいしかなかった。例えばシュレーディンガーは、1954年に“Measurement of length and angle in quantum mechanics” [6] という論文を Nature に出した。それは結論を述べることよりも自分の疑問を述べることに重点を置いた論文だが、そういった論文を出したからと言ってシュレーディンガーがとがめられたわけではない。また、アンダーソンの“More is different” [7] という題の有名な記事は狭義の物理学論文というよりは、彼が思うところの物理学の指針を示したような文章だった。マーミンも私見的な記事を科学雑誌に何度も寄稿している [8, 9]。つまり、物理学者はつねに学界で広く認められた言説や数学的に正しい命題のみを公表しているのではなく、しばしば私見を公表している。

しかも解釈が諸説あるような場面では、自分が納得できる解釈と納得できない解釈とがあるのは避けられないことであり、多かれ少なかれ私見にもとづく論評をせざるを得ない。そこで私も少々勇気を奮って私見を披露しようと思う。もちろん学者としての公平な観点から述べるつもりである。

数学的には、量子論の命題は、射影演算子の集合に備わる束そくと呼ばれる構造で定式化され、この構造をさらに抽象化したものは量子論理と呼ばれる。射影演算子は「0 または 1 の真理値」をとる古典命題を拡張した概念だと言えるし、射影演算子の期待値が 0 以上 1 以下の実数値確率なので、論理説は量子論との相性がよいように思える。つまり、量子論で扱う確率に関しては、数学理論としては論理説の解釈が筋がよく、実験検証においては他の物理理論と同様、頻度説の解釈を使っているように見える。しかし、話はそれだけにとどまらない。

量子論における確率は、もしも測定すればこれこれの確率でいくらの測定値を得るのであるという確率である。「測定をすればいくらの測定値を得であろう確率」という考え方は、可能性としての確率、すなわち傾向説の確率を指しているように思える。シュレーディンガーは「波動関数は予測目録である」と述べたが [10]、たしかに、量子論の波動関数（より抽象的には状態ベクトル）は、「もしも...すれば...が...の確率で起こるだろう」型の予測集と言えるものであり、物理系の潜在的可能性・傾向性を記述しているものだとも言える。ハイゼンベルクは「波動関数は probability を表している」と言う代わりに「波動関数は potentiality

を表している」と言うことを提案したらしいが [11], そう言いたくなる気持ちもわかる。ちなみに potentiality の対義語は actuality で, これらの語の使用はアリストテレスにまで<sup>さかのぼ</sup>遡れるらしい (potentiality にあたるギリシャ語は「デュナミス」, actuality のギリシャ語表現は「エネルゲイア」または「エンテレケイア」)。

なお, このノートの第3節では, 物理量  $A$  と  $U$  の測定値の同時出現確率を量子論にもとづいて計算したが, もちろん物理量  $A$  だけの測定値の出現確率を計算することもできるし, その確率は 0 以上 1 以下の実数値になっているし, 実験では出現頻度として確認できる。本記事にも書いたが, 物理量の値が実在するなら, その値には 0 以上 1 以下の存在確率を割り当てられることを我々は要請していた。そして, 測られていない物理量の値も 0 以上 1 以下の頻度で実在しているならば, ベルの不等式が成立するはずだった。

量子論はベルの不等式が破れることを予測するし, 実験はベルの不等式が破れることを実証した。第4節では物理量  $A, B, U, V$  の値の存在確率を量子論の数学を用いて算出した。そのような確率は負の値になることもあった。その意味では, ベルの不等式の破れは, 確率の実在論的頻度解釈を放棄せよと言っているようにも見える。

負の確率をどう解釈するか? 負の確率はたんなる数学的形式にすぎないのか? といった問いは, また難問であり, 次の節で述べる弱値解釈は, 負の確率にも物理的意味づけ・操作論的意味づけができることを示唆しているように見える。このような確率概念が既存の確率解釈の諸説の枠内に収まるか? という問いも立てられなくはない。私は, 量子論に現れる負の確率は, 「負の傾向」, 「負の可能性」をも許容する「拡張された傾向説」の立場で捉えるのが合理的であろうと考えている。

ちなみに, ファインマンは負の確率について議論していたことがあるが [12], これを我々の文脈でどう捉えたらよいか, まだわからない。検討してみる価値はあると思う。

なお, これは本記事では述べなかったことの補足だが, 非可換物理量である  $A$  と  $B$  は, 同時に理想的な測定はできないが, 理想的でない測定, つまり測定誤差を伴う測定でよければ, 同時にでも測定できる。測定誤差は, 物理量の真の値と読み取った測定値との差として定義される。直接的には知ることのできない「物理量の真の値」とは何であるかは, 現実的・哲学的には難しい問題だが, 数学的には定義できる。二つの物理量を同時測定するときの誤差に関する不確定性関係を小澤正直氏が発見したし [13, 14, 15, 16, 17], 二つの物理量が同時に誤差なしの測定ができるための必要十分条件も小澤氏が明らかにしている [18]。この意味では, ベルの不等式の検証実験に現れる物理量  $A$  と  $B$  の誤差なしの同時測定は原理的に不可能であることが証明される。物理量  $U$  と  $V$  についても同様のことが言える。測定誤差を許容するということは,  $A$  の真の値は 1 であっても, 測定器は  $-1$  という値を示すことがあるということだ。誤差ありの測定でよければ  $A, B, U, V$  は同時に測定できる。そしてその場合はベルの不等式は成立する。

## 7 波動関数のよりよい解釈を求めて

確率の主観解釈を量子論の波動関数そのものの解釈に写し取った QBism という流儀がある。QBism は Quantum Bayesianism (クオントム・ベイジアンイズム) の略語であり, 「キュー

ビズム」あるいは「キュビズム」と読まれる。これは確率の解釈論ではなく、量子論の波動関数の解釈の一説であり、物理学者であるフックスによって2010年頃から提唱されている [19, 20, 21, 22]。QBismの詳細内容は、人によって若干異なるが、QBismの核心は、「波動関数（状態ベクトル）は、観測される対象系の状態を表すのではなく、観測者の知識・信念の状態を表している」とする点にある。

標準的な量子論の解釈では、観測前の波動関数は、起こり得るすべての事象の確率を内包しているが、「系が観測されると波動関数が急変し、一つの事象が確定するとともに観測後の波動関数になりきる」という波束の収縮仮説 (collapse of wave function) を援用する。量子論にとって「波束の収縮」はあくまで仮定であって、「波束の収縮」が、いつ起こるか、起こり得る事象のうちどれが実際に起こるか、といった説明や予測を量子論は与えてくれない。また、「波束の収縮」にまつわるパラドクスがいくつもあり、「波束の収縮」仮説を信じられないという物理学者もいるし、「波束の収縮」仮説は物理法則というよりは方便にすぎないとみなす物理学者もいる。

しかし、観測データを知ることによって観測者の知識が変化することは当たり前だと思えるので、波動関数が観測者の知識状態・信念状態を表しているとすれば、観測者が情報を取得するときに波動関数が急変することは奇妙ではない。こう考えれば波束の収縮は不合理ではないように思えるというのが、QBismの最大の「売り」である。

フックス自身は、古典確率論のベイズの公式の量子論バージョンのような公式を見つけて、それをQBismを支持する根拠としていた [20]。しかし、フックスの公式は、SIC (symmetric informationally complete positive-operator-valued measure) の存在仮定に依存しており、SICの存在は一般には保証されていない。また、数学的定理というものは解釈に依らずに成立すべきものであって、古典確率論のベイズの公式も「主観説を採用しなければ証明できない数式」ではない。ただ、主観説の立場に立つと、ベイズの公式を快く使えるという程度のものである。なので、ベイズの公式の量子論バージョンが成立したとしても、それを量子論解釈の主観説の正当性の根拠とするのは論理が飛躍しているように思える。マーミンはQBismの熱心な支持者であるが [8]、QBismの根拠として量子ベイズ公式を引き合いに出すことはないようである。

何よりもQBismは波動関数を観測者の属性としてしまっているため、観測者不在の場面での物理現象をQBism量子論は記述できるのか？という疑問を誘う。また、何をもって観測者とするかという定義も曖昧である。宇宙では無数の現象が人知れず起きている。その中には、量子論によって確率予測されるはずの現象が、これまた無数にある。もちろん人類が一人もいなかった太古の昔から量子論的確率現象は起きていたに違いない。すべての量子現象を観測者が関知しているとは思えない。

私は以前、人知れず起きている量子論的確率事象の例として、恒星の核融合反応、天体の大気中の原子による光の吸収・散乱・放射などを挙げた [23]。これらの現象を観測する者がいなければ、波動関数の収縮は起きず、何が起きたという現象は確定しないのか？という疑問を私は抱いている。

しつこくなるが、実感を持っていただくために「人知れず起きている量子論的確率事

象」の例をいくつか挙げよう。太陽の中心付近では核融合反応が起きているが、それは、プラスの電荷を持った陽子同士が反発しながらもわずかな確率で近づく量子力学的トンネル効果と、ニュートリノ生成を伴う弱い相互作用という確率の小さな量子論的過程を通して起こる現象である。これらの確率が非常に小さいおかげで、太陽はじわじわと何億年も燃え続けることができる。この確率がもっと大きかったら、太陽は核爆弾のように一瞬に燃え尽きてしまっていたらう。

地球の晴れた空が青く見えるのは、空気中の分子が、非常に小さな確率で光子を散乱するためである。太陽から地球に降り注いだ光子のうちの大多数は、1回も空気の分子に衝突せずに地表に到達する（空気は透明）。衝突するとしても1光子は大気を通過して地面に到達するまでにせいぜい1回だけ散乱される。1回の衝突が起こる確率は量子力学で決まっています、青い光の方が確率が大きい。そのため、青い光は進行方向が変わりやすく、地表に立っている人には、太陽とは異なる方向から青い光が降り注いで来るように見える。

雲は、氷の結晶の集団が浮かんでいるもので、光子との衝突確率はとても大きい。あらゆる波長（色）の光が何度も散乱されて、結果的に、雲は不透明で白く見える。

火星の空や、土星の衛星タイタンの空も、量子力学的散乱確率で決まる色に染まっていることだろう。観測者や探査機がなくてもだ。地球の空も、まだ人類が一人も存在していなかった太古の昔から青空や夕焼けが映えていたらう。

何億光年離れた星は、地球に観測者がいてくれたおかげで、波動関数が収縮し、核反応し、輝いている、とは私には思えない。オーロラも、大気の原子の量子力学的エネルギー準位間の遷移による発光現象である。知識や信念を持ったエージェントが立ち会っていなくても、量子論的確率現象は宇宙のいたるところで起きていることに思いを馳せてほしい。むしろ、プロの物理学者の一部の人たちは、量子力学は特殊な実験室でのみ確かめられるものだという思い込みをしていて、じつは量子力学が森羅万象の現象を引き起していることを忘れてしまっているかのようだ。

QBism は「観測者（行為主体）がいれば、その人の心に宿った波動関数が定める確率に応じた現象が起き、現象を見た人の波動関数が変化する」と言うが、「観測者のいないところで、何かが、ある確率で起こっている」と言ってよいか？という問いに対して、結局、明確な答えを与えていない。QBism は「観測者参加型宇宙論」が行き過ぎていて、「観測者不在宇宙」について何かを言うことを放棄しているように見える。こういったわけで、私にはQBism は出来のよい解釈だとは思えない。

なお、観測者の定義が曖昧、かつ、観測者が立ち会っていない場面で事象は確定するのが不明、という難点は、量子論の多世界解釈にもつきまとうと思われる。

一般論として、解釈というものは、唯一の正しい解釈があるようなものではない。解釈には諸説あってよいし、一つの解釈論も、ある基準では優れていると評される面もあるし、別の基準に照らせば劣っていると評される面もあるだろう。物理理論の解釈というものは、理論と現象観測との間をつなぐことであって、解釈それ自体は理論ではない。解釈は、それ自体の正誤を問われるよりは、理論と観察の橋渡し役としてうまく機能するかどうかを問われるものであろう。その意味で、QBism 解釈は、観測者不在の現象と理論との間の橋渡しを

やっていないという不備を指摘されるのである。

なお、ある理論と別の理論の間をつなぐ解釈もある。例えば、熱力学の概念を統計力学の概念で解釈するということもあり得る。いずれにしても、解釈というものは、一つの閉じた体系内の何かではなく、二つの体系間のインターフェイス的な変換・伝達操作として捉えるのが適切であろう。

「観測者」を「古典的・マクロ的な測定器」に置き換えれば、QBism はだいごましになると思う。別のところで私は、波動関数（状態ベクトル）は、量子系に内在しているものではなく、系の外にいる観測者・測定器の属性でもなく、量子系と測定器系の間の窓口・インターフェイス・状況設定として捉えるのが適切だという考えを書いたが [24, 25]、いまでもこの考えが一番よいと思っている。ここで私は、「現象の記録・痕跡を不可逆的に残すシステム」という意味で「測定器」という言葉を使っている。測定器は自我や意識を持った生物である必要はないし、人工的に作られた機械である必要もない。測定器は、古典的な系、つまり、そのようなものが客観的に実在しているとみなせて、ある程度、消し去りにくい痕跡を残すようなシステムでありさえすれば何でもよい。私は、古典系は「近似的に可換な」物理量代数で記述される系として特徴づけられると考えている。可換な物理量は、実在論的な記述が可能であるからだ。「近似的に」という形容を付けたのは、我々が手にするマクロ系は厳密には「ちょっぴりの非可換性・量子性」を担っていると考えられるからである。不可逆性の由来を厳密に示すのは難しいが、マクロスケールでの物理量の粗視化と時間発展の不可逆性とは密接に関連していると考えられる。

量子系に対する観測・記述は古典系によってなされるというのはボーアが繰り返し述べていたことであった [26]。ボーアの論点をよく理解していれば、量子論の解釈問題において、ことさらに観測者の意識や信念を強調する必要はなかったように思われる。

もとより「量子論の解釈」というのは、ミクロの世界の現象・挙動をどうにか古典マクロの世界の言語・概念の網で捉えようとすることである。我々人類は、古典マクロ世界に生まれついており、マクロ世界の中で経験したことを語り、経験しうることを推論するのに適した言語を編み出してきた生き物である。ミクロ世界の現象や法則を、マクロ世界の言語に落とし込もうとすることにそもそも無理があり、マクロ世界の思考体系を使っている限り、量子論のある一面は適切に解釈できるが、別の面では無理が生じるのは、しかたのないことであり、マクロ世界の言語で量子論のドンピシャリの解釈を語れるはずがないと考える方が自然ではないか。これが「量子論の解釈論争」に対して私が冷淡である主な理由である。

それでも、この世界が根源的には量子論的な要素からできていることと、一方で、人間のスケールでは古典物理的な振る舞いをする物質が目につくことは無視できない。量子論的なミクロ系から古典論的なマクロ系がいかにして創発されるのかという問題は、たんなる解釈の問題として済ませるべきではなく、物理の問題として解決されるべきであろう。さらには、いかにしてマクロ系がミクロ系を観測・記述・制御するシステムになるのかという問題も物理理論として数学的に定式化・解明されるべきであろう。そして、これらの問題こそが私に取り組んでいる研究テーマである。

なお、小澤氏は、被測定対象系と測定器とを合わせた複合系に対して（非負の確率を与え



る) ボルンの確率公式の適用を認めるなら、「被測定対象系における波束の収縮」を表す数式を導けることを示している [27, 28, 29]。この意味で、波束の収縮は、通常の量子力学の枠組み内で数学的に正当化されている。「波束の収縮は、量子力学の枠組みに収まらない、取って付けたような規則だ」というようなクレームを言う人がしばしばいるが、波束の収縮の導入が論理飛躍しているわけではないし、波束の収縮を正当化するために主観解釈が必要なわけでもない。ただ、小澤氏の論法でも、「波束の収縮」公式が意味をなすためには測定結果を記録する古典的システムの存在は欠かせない。

## 8 負の確率の弱値解釈

数学的な議論に戻ろう。第4節で、ベルの不等式の検証実験に関わる物理量  $A, B, U, V$  すべての値が同時に出現する確率  $P_{ABUV}$  を計算すると (4.13) のように確率が負の値になることを見た。この節では、結合確率が負になることは、条件付き確率が負になることと同等であることを示し、条件付き確率はアハラノフらが提唱した弱値 (weak value) と同等であることを示そう。

量子論の枠組みの中で、結合確率と条件付き確率の定義を述べよう。 $n$  個の物理量  $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$  があるとする。いずれも離散スペクトルを持つとし、それぞれのスペクトル分解を

$$A^{(i)} = \sum_{\nu} a_{\nu}^{(i)} \Pi_{\nu}^{(i)} \quad (8.1)$$

とする。ここで  $\Pi_{\nu}^{(i)}$  は  $A^{(i)}$  の固有値  $a_{\nu}^{(i)}$  に属する固有空間への射影演算子である。 $\nu \neq \nu'$  ならば  $a_{\nu}^{(i)} \neq a_{\nu'}^{(i)}$  である。ヒルベルト空間の任意の単位ベクトル  $|\psi\rangle$  に対して“結合確率” (joint probability)

$$P(a_{\nu_1}^{(1)}, \dots, a_{\nu_n}^{(n)}) := \langle \psi | \Pi_{\nu_n}^{(n)} \dots \Pi_{\nu_1}^{(1)} | \psi \rangle \quad (8.2)$$

を定義する。一般に、これは負の実数になることもあるし、実数ではない複素数になるかもしれない。ただ、 $P(a_{\nu_1}^{(1)}, \dots, a_{\nu_n}^{(n)})$  の絶対値は0以上1以下であることは証明できる。また、

$$\sum_{\nu_1} \dots \sum_{\nu_n} P(a_{\nu_1}^{(1)}, \dots, a_{\nu_n}^{(n)}) = 1 \quad (8.3)$$

は成り立つし、番号  $i$  と  $\nu_i$  を固定して、他の番号  $\nu_j$  についてはすべての固有値にわたる和をとれば

$$\sum_{\nu_1} \dots \sum_{\nu_{i-1}} \sum_{\nu_{i+1}} \dots \sum_{\nu_n} P(a_{\nu_1}^{(1)}, \dots, a_{\nu_{i-1}}^{(i-1)}, a_{\nu_i}^{(i)}, a_{\nu_{i+1}}^{(i+1)}, \dots, a_{\nu_n}^{(n)}) = \langle \psi | \Pi_{\nu_i}^{(i)} | \psi \rangle =: P(a_{\nu_i}^{(i)}) \quad (8.4)$$

が成立する。 $P(a_{\nu_i}^{(i)})$  は0以上1以下の実数であり、通常の量子論の解釈によれば、「物理量  $A^{(i)}$  の値が  $a_{\nu_i}^{(i)}$  である確率」と解釈されるものである。そこで、(8.2) の  $P(a_{\nu_1}^{(1)}, \dots, a_{\nu_n}^{(n)})$  を形式的に「 $A^{(1)}$  の値が  $a_{\nu_1}^{(1)}$  であり、かつ、 $A^{(2)}$  の値が  $a_{\nu_2}^{(2)}$  であり、かつ、 $\dots$ 、 $A^{(n)}$  の値が  $a_{\nu_n}^{(n)}$  である確率」と解釈することにする。一般に  $P(a_{\nu_1}^{(1)}, \dots, a_{\nu_n}^{(n)})$  は負の実数であったり非実数であったりするので、これを頻度と解釈するのは無理がある。しかも  $P(a_{\nu_1}^{(1)}, \dots, a_{\nu_n}^{(n)})$

の値は物理量  $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}$  を並べる順序に依存する。それでも規格化条件 (8.3) と周辺確率 (marginal probability) の公式 (8.4) は正しく満たしているので、 $P(a_{\nu_1}^{(1)}, \dots, a_{\nu_n}^{(n)})$  をクォーテーションマーク付きの“結合確率”と呼ぶ。

規格化条件 (8.3) と周辺確率の公式 (8.4) を満たす「結合確率もどき」は、擬確率 (pseudo-probability) とも呼ばれる。規格化条件と周辺確率の公式を満たす擬確率は一意的ではない。擬確率の構成と分類に関しては李・筒井が詳しく研究している [30]。また、2 個のスピン (2-qubit system) に対しては、ベルの不等式が成立することは、非負の擬確率が存在するための必要十分条件であることを Fine が示している [31]。つまり、ベルの不等式が破れるときは、必ず負の擬確率が発生しているのである。

番号  $i$  を固定して、 $P(a_{\nu_1}^{(1)}, \dots, a_{\nu_{i-1}}^{(i-1)}, a_{\nu_{i+1}}^{(i+1)}, \dots, a_{\nu_n}^{(n)}) := \langle \psi | \Pi_{\nu_n}^{(n)} \dots \Pi_{\nu_{i+1}}^{(i+1)} \Pi_{\nu_{i-1}}^{(i-1)} \dots \Pi_{\nu_1}^{(1)} | \psi \rangle \neq 0$  のとき

$$P(a_{\nu_i}^{(i)} | a_{\nu_1}^{(1)}, \dots, a_{\nu_{i-1}}^{(i-1)}, a_{\nu_{i+1}}^{(i+1)}, \dots, a_{\nu_n}^{(n)}) := \frac{P(a_{\nu_1}^{(1)}, \dots, a_{\nu_{i-1}}^{(i-1)}, a_{\nu_i}^{(i)}, a_{\nu_{i+1}}^{(i+1)}, \dots, a_{\nu_n}^{(n)})}{P(a_{\nu_1}^{(1)}, \dots, a_{\nu_{i-1}}^{(i-1)}, a_{\nu_{i+1}}^{(i+1)}, \dots, a_{\nu_n}^{(n)})} \quad (8.5)$$

を形式的な“条件付き確率” (conditional probability) と呼ぶ。これは負実数かもしれないし、非実数かもしれないし、絶対値は 1 よりも大きいかもしれない。あまりにも形式的なので、解釈を言うのはナンセンスかもしれないが、 $P(a_{\nu_i}^{(i)} | a_{\nu_1}^{(1)}, \dots, a_{\nu_{i-1}}^{(i-1)}, a_{\nu_{i+1}}^{(i+1)}, \dots, a_{\nu_n}^{(n)})$  は、「 $A^{(1)}$  の値が  $a_{\nu_1}^{(1)}$  であり、かつ、 $\dots$ 、 $A^{(i-1)}$  の値が  $a_{\nu_{i-1}}^{(i-1)}$  であり、かつ、 $A^{(i+1)}$  の値が  $a_{\nu_{i+1}}^{(i+1)}$  であり、かつ、 $\dots$ 、 $A^{(n)}$  の値が  $a_{\nu_n}^{(n)}$  であるという条件のもとで、 $A^{(i)}$  の値が  $a_{\nu_i}^{(i)}$  である確率」を表していると考える。変数が多すぎるとわかりにくいかもしれないので、物理量が 2 種だけの場合の“条件付き確率”  $P(a_{\nu_2}^{(2)} | a_{\nu_1}^{(1)})$  の定義式を

$$P(a_{\nu_2}^{(2)} | a_{\nu_1}^{(1)}) P(a_{\nu_1}^{(1)}) = P(a_{\nu_1}^{(1)}, a_{\nu_2}^{(2)}) \quad (8.6)$$

と書くと、意味がとりやすいのではないだろうか。この式の左辺は、まず物理量  $A^{(1)}$  を測ってその値が  $a_{\nu_1}^{(1)}$  となって、さらに物理量  $A^{(2)}$  を測ってその値が  $a_{\nu_2}^{(2)}$  となる確率と解釈できる。式 (8.6) の右辺は、物理量  $A^{(1)}$  の値が  $a_{\nu_1}^{(1)}$  かつ  $A^{(2)}$  の値が  $a_{\nu_2}^{(2)}$  となる確率と解釈できる。また、

$$P(a_{\nu_1}^{(1)} | a_{\nu_2}^{(2)}) P(a_{\nu_2}^{(2)}) = P(a_{\nu_1}^{(1)}, a_{\nu_2}^{(2)}) \quad (8.7)$$

も成り立つ。(8.6) で定められる  $P(a_{\nu_2}^{(2)} | a_{\nu_1}^{(1)})$  を前件で条件付けられた確率といい、(8.7) で定められる  $P(a_{\nu_1}^{(1)} | a_{\nu_2}^{(2)})$  を後件で条件付けられた確率という。

ちなみに

$$P(a_{\nu_1}^{(1)}, a_{\nu_2}^{(2)}) = P(a_{\nu_1}^{(1)}) P(a_{\nu_2}^{(2)}) \quad (8.8)$$

が  $A^{(1)}, A^{(2)}$  のすべての固有値について成り立つことを、状態  $|\psi\rangle$  において  $A^{(1)}$  と  $A^{(2)}$  が独立 (independent) であるという。独立であるための必要十分条件は

$$P(a_{\nu_2}^{(2)} | a_{\nu_1}^{(1)}) = P(a_{\nu_2}^{(2)}) \quad (8.9)$$

である。こうなっていれば、 $A^{(1)}$  の値と  $A^{(2)}$  の値はまったく無関係であると言える。

とくに番号  $i$  の前後の射影演算子  $\Pi_{\nu_{i-1}}^{(i-1)}$  と  $\Pi_{\nu_{i+1}}^{(i+1)}$  の像が 1 次元であると仮定する。このとき,

$$\Pi_{\nu_{i-1}}^{(i-1)} = |\xi_{i-1}\rangle\langle\xi_{i-1}|, \quad \Pi_{\nu_{i+1}}^{(i+1)} = |\xi_{i+1}\rangle\langle\xi_{i+1}| \quad (8.10)$$

と書くことができ、

$$\begin{aligned} & P(a_{\nu_1}^{(1)}, \dots, a_{\nu_{i-1}}^{(i-1)}, a_{\nu_i}^{(i)}, a_{\nu_{i+1}}^{(i+1)}, \dots, a_{\nu_n}^{(n)}) \\ &= \langle\psi|\Pi_{\nu_n}^{(n)} \dots \Pi_{\nu_{i+1}}^{(i+1)} \Pi_{\nu_i}^{(i)} \Pi_{\nu_{i-1}}^{(i-1)} \dots \Pi_{\nu_1}^{(1)}|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|\Pi_{\nu_n}^{(n)} \dots \Pi_{\nu_{i+2}}^{(i+2)} |\xi_{i+1}\rangle\langle\xi_{i+1}| \Pi_{\nu_i}^{(i)} |\xi_{i-1}\rangle\langle\xi_{i-1}| \Pi_{\nu_{i-2}}^{(i-2)} \dots \Pi_{\nu_1}^{(1)}|\psi\rangle \end{aligned} \quad (8.11)$$

および

$$\begin{aligned} & P(a_{\nu_1}^{(1)}, \dots, a_{\nu_{i-1}}^{(i-1)}, a_{\nu_{i+1}}^{(i+1)}, \dots, a_{\nu_n}^{(n)}) \\ &= \langle\psi|\Pi_{\nu_n}^{(n)} \dots \Pi_{\nu_{i+1}}^{(i+1)} \Pi_{\nu_{i-1}}^{(i-1)} \dots \Pi_{\nu_1}^{(1)}|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|\Pi_{\nu_n}^{(n)} \dots \Pi_{\nu_{i+2}}^{(i+2)} |\xi_{i+1}\rangle\langle\xi_{i+1}| |\xi_{i-1}\rangle\langle\xi_{i-1}| \Pi_{\nu_{i-2}}^{(i-2)} \dots \Pi_{\nu_1}^{(1)}|\psi\rangle \end{aligned} \quad (8.12)$$

が成り立つので, (8.5) は

$$P(a_{\nu_i}^{(i)} | a_{\nu_1}^{(1)}, \dots, a_{\nu_{i-1}}^{(i-1)}, a_{\nu_{i+1}}^{(i+1)}, \dots, a_{\nu_n}^{(n)}) = \frac{\langle\xi_{i+1}|\Pi_{\nu_i}^{(i)}|\xi_{i-1}\rangle}{\langle\xi_{i+1}|\xi_{i-1}\rangle} \quad (8.13)$$

に等しい。物理量  $A^{(i)}$  の“条件付き期待値” (conditional expected value) を

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(A^{(i)} | a_{\nu_1}^{(1)}, \dots, a_{\nu_{i-1}}^{(i-1)}, a_{\nu_{i+1}}^{(i+1)}, \dots, a_{\nu_n}^{(n)}) \\ &:= \sum_{\nu_i} a_{\nu_i}^{(i)} P(a_{\nu_i}^{(i)} | a_{\nu_1}^{(1)}, \dots, a_{\nu_{i-1}}^{(i-1)}, a_{\nu_{i+1}}^{(i+1)}, \dots, a_{\nu_n}^{(n)}) \end{aligned} \quad (8.14)$$

で定めれば,

$$\mathbb{E}(A^{(i)} | a_{\nu_1}^{(1)}, \dots, a_{\nu_{i-1}}^{(i-1)}, a_{\nu_{i+1}}^{(i+1)}, \dots, a_{\nu_n}^{(n)}) = \frac{\langle\xi_{i+1}|A^{(i)}|\xi_{i-1}\rangle}{\langle\xi_{i+1}|\xi_{i-1}\rangle} \quad (8.15)$$

が成り立つ。とくに 2 つの物理量  $A^{(1)}, A^{(2)}$  についての“結合確率”  $\langle\psi|\Pi_{\nu_2}^{(2)} \Pi_{\nu_1}^{(1)}|\psi\rangle$  における  $\Pi_{\nu_2}^{(2)}$  が 1 次元射影演算子  $\Pi_{\nu_2}^{(2)} = |\xi\rangle\langle\xi|$  であれば, 後件で条件付けられた確率は

$$P(a_{\nu_1}^{(1)} | a_{\nu_2}^{(2)}) = \frac{\langle\psi|\Pi_{\nu_2}^{(2)} \Pi_{\nu_1}^{(1)}|\psi\rangle}{\langle\psi|\Pi_{\nu_2}^{(2)}|\psi\rangle} = \frac{\langle\psi|\xi\rangle\langle\xi|\Pi_{\nu_1}^{(1)}|\psi\rangle}{\langle\psi|\xi\rangle\langle\xi|\psi\rangle} = \frac{\langle\xi|\Pi_{\nu_1}^{(1)}|\psi\rangle}{\langle\xi|\psi\rangle} \quad (8.16)$$

となる。この数値は「始状態が  $|\psi\rangle$  であり終状態が  $|\xi\rangle$  であるという条件のもとで, 始状態から終状態に至る途中で  $A^{(1)}$  の値が  $a_{\nu_1}^{(1)}$  である確率」であると解釈される。この確率による  $A^{(1)}$  の期待値は

$$\mathbb{E}(A^{(1)} | a_{\nu_2}^{(2)}) := \sum_{\nu_1} a_{\nu_1}^{(1)} P(a_{\nu_1}^{(1)} | a_{\nu_2}^{(2)}) = \frac{\langle\xi|A^{(1)}|\psi\rangle}{\langle\xi|\psi\rangle} \quad (8.17)$$

これはアハラノフ・アルバート・ヴェイドマン [32, 33, 34] によって弱値と名付けられた数量である。深く考えずに解釈すれば,  $\mathbb{E}(A^{(1)} | a_{\nu_2}^{(2)})$  は「始状態  $|\psi\rangle$  と終状態  $|\xi\rangle$  を指定した

条件のもとで、始状態から終状態に至る途中での  $A^{(1)}$  の期待値」ということになる。問題は、このような数量を実測できるか、ということなのだが、アハラノフたちは弱測定 (weak measurement) という方法を提案して、(8.17) の値を測定できることを示した。

それと、もう一つコメントすると、結合確率が負になることはパンチャラトナムの位相 (Pancharatnam's phase) の一種として理解することもできる。(  $\Pi_{\nu_i}^{(i)} = |\xi_i\rangle\langle\xi_i|$  と書ける場合 ) 一つの物理量  $A^{(2)}$  の値の確率分布

$$P(a_{\nu_2}^{(2)}) = \langle\psi|\Pi_{\nu_2}^{(2)}|\psi\rangle = \langle\psi|\xi_2\rangle\langle\xi_2|\psi\rangle = \left|\langle\xi_2|\psi\rangle\right|^2 \quad (8.18)$$

はつねに非負実数値であるが、二つの物理量  $A^{(1)}, A^{(2)}$  の値についての“結合確率”は

$$\begin{aligned} P(a_{\nu_1}^{(1)}, a_{\nu_2}^{(2)}) &= \langle\psi|\Pi_{\nu_2}^{(2)}\Pi_{\nu_1}^{(1)}|\psi\rangle = \langle\psi|\xi_2\rangle\langle\xi_2|\xi_1\rangle\langle\xi_1|\psi\rangle = \text{Tr}\left(\Pi_{\nu_2}^{(2)}\Pi_{\nu_1}^{(1)}|\psi\rangle\langle\psi|\right) \\ &= re^{i\theta} \end{aligned} \quad (8.19)$$

となる。これは一般に複素数値であり、その位相  $\theta$  はパンチャラトナムの位相 [35, 36, 37, 38] と呼ばれる。

擬確率が負になったり、弱値が固有値よりも大きな値になったりすることは、以下のように幾何学的に理解できる。図形的には (8.18) は図 1(a) のように表現できる。ヒルベルト空間の単位ベクトル  $|\psi\rangle$  が与えられたとき、そのスカラー倍が張る 1 次元部分空間を射線 (ray) と呼ぶ。(8.18) の中の  $|\xi_2\rangle\langle\xi_2|\psi\rangle$  は、ベクトル  $|\psi\rangle$  を  $|\xi_2\rangle$  の射線に射影したベクトルになっている。これを再び  $|\psi\rangle$  の射線に射影すると、 $|\psi\rangle\langle\psi|\xi_2\rangle\langle\xi_2|\psi\rangle$  となり、このベクトルは、必ず元のベクトル  $|\psi\rangle$  と同じ向きを向いており、その長さが確率 (8.18) に等しい。

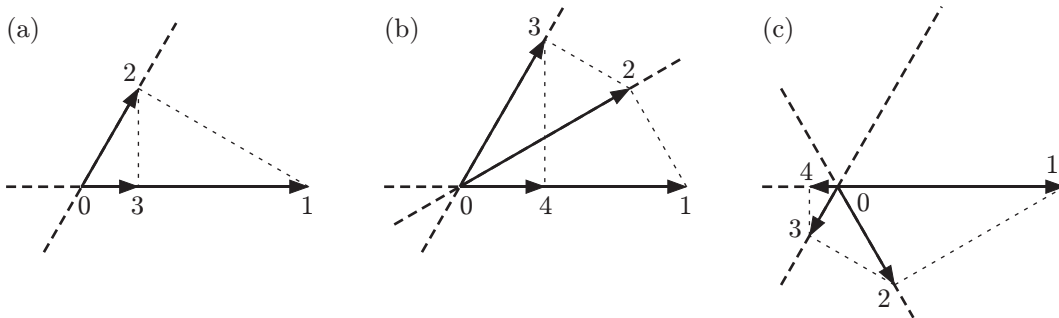


図 1: 擬確率の幾何学的描像。(a) 0 を始点とし 1 を終点とする単位ベクトル  $\vec{01} = |\psi\rangle$  を  $|\xi_2\rangle$  の射線に射影したのが  $\vec{02} = |\xi_2\rangle\langle\xi_2|\psi\rangle$ 。これをもう一度射影した  $\vec{03} = |\psi\rangle\langle\psi|\xi_2\rangle\langle\xi_2|\psi\rangle$  の長さが確率 (8.18) に等しい。(b), (c) とともに  $\vec{01} = |\psi\rangle$ ,  $\vec{02} = |\xi_1\rangle\langle\xi_1|\psi\rangle$ ,  $\vec{03} = |\xi_2\rangle\langle\xi_2|\xi_1\rangle\langle\xi_1|\psi\rangle$ ,  $\vec{04} = |\psi\rangle\langle\psi|\xi_2\rangle\langle\xi_2|\xi_1\rangle\langle\xi_1|\psi\rangle$ 。最後のベクトル  $\vec{04}$  の長さが擬確率 (8.19) に等しい。(c) では最終的にできるベクトル  $\vec{04}$  は  $\vec{01}$  の逆を向いている。このとき擬確率 (8.19) が負になる。

同様に (8.19) も図 1(b), (c) のように表現できる。ベクトル  $|\psi\rangle$  を、まず  $|\xi_1\rangle$  の射線に射影する。次に  $|\xi_2\rangle$  の射線に射影し、もう一度  $|\psi\rangle$  の射線に射影してできるベクトル  $|\psi\rangle\langle\psi|\xi_2\rangle\langle\xi_2|\xi_1\rangle\langle\xi_1|\psi\rangle$  の  $|\psi\rangle$  に対する比が擬確率 (8.19) に等しい。図 1(b) と (c) とでは

$|\xi_1\rangle$  の選び方が異なっている。図 1(c) のように、最後の射影で作られたベクトルが元のベクトル  $|\psi\rangle$  の逆方向を向いていれば (8.19) の値は負になる。この図から、互いに直交していない射線が 3 本以上あれば、擬確率は負になりうるということがわかる。一般に、可換な物理量演算子の固有ベクトル空間は一致するか直交するかのどちらかであるから、同時対角化できない非可換物理量があるときに限って、擬確率が負になることがある。ここにも、量子性 = 物理量の非可換性  $\Rightarrow$  物理量の値の同時実在性の否定、負の確率という関係が見える。

直線偏光の状態は、射線の図と相似対応する。別のところ [39] でも述べたが、光学の実験で 2 枚の偏光フィルターを偏光軸が直交するように重ねると、光はまったく透過しない (図 2(a))。しかし、2 枚の直交偏光フィルターの間斜めの偏光フィルターを挿入すると光が少しは通る (図 2(b))。2 枚重ねて光が通らないのに、3 枚重ねた方が光が通るというのは、直観に反していてちょっとした驚きである。これは 2 状態の遷移確率 (8.18) はゼロであっても、中間状態を指定した遷移確率はゼロではないという状況になっている。さらに中間状態を取り換えると、最終状態に遷移したときに負号が反転することもある (図 2(c))。形式的に、図 2(c) の遷移過程  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$  で中間状態 2 を通る確率を正とするなら、遷移過程  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5$  で中間状態 4 を通る確率は負だということになる。

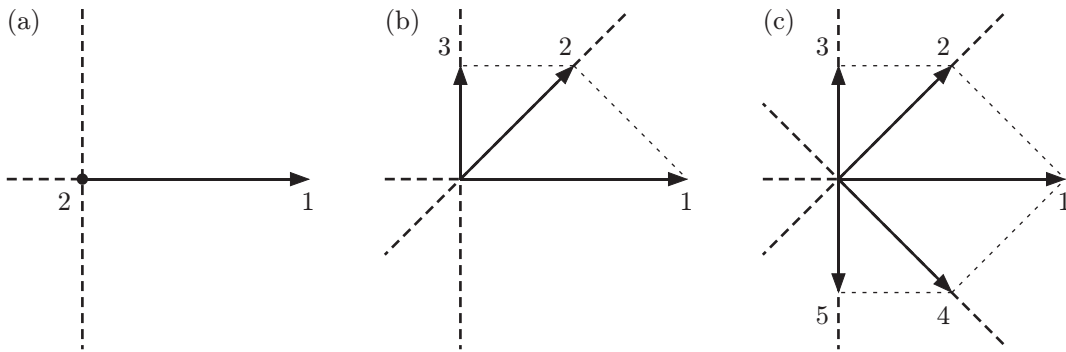


図 2: (a) 直交する偏光状態の遷移確率はゼロ。(b) 途中で斜めの偏光状態に射影すると遷移確率は正になる。(c) 別の中間状態に対する遷移確率もゼロではない。

上の例では正負の擬確率が出て来るようには見えない。正負の違いを浮き上がらせるためには、3 枚目の偏光フィルターの軸をわずかに傾けるとよい。射影したベクトルの長さの比は三角関数  $\cos$  で決まる。重なった 2 枚のフィルターの偏光軸のなす角 (ラジアン) を  $\theta \mp \delta$  とすると、

$$\cos(\theta \mp \delta) = \cos \theta \cos \delta \pm \sin \theta \sin \delta \quad (8.20)$$

であり、 $\theta = \frac{\pi}{2}$  のときは微小角  $\delta$  に対して近似的に

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \mp \delta\right) \approx \pm \delta \quad (8.21)$$

が成り立つ。 $\theta = \frac{\pi}{4}$  のときは微小角  $\delta$  に対して

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} \mp \delta\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm \delta) \quad (8.22)$$

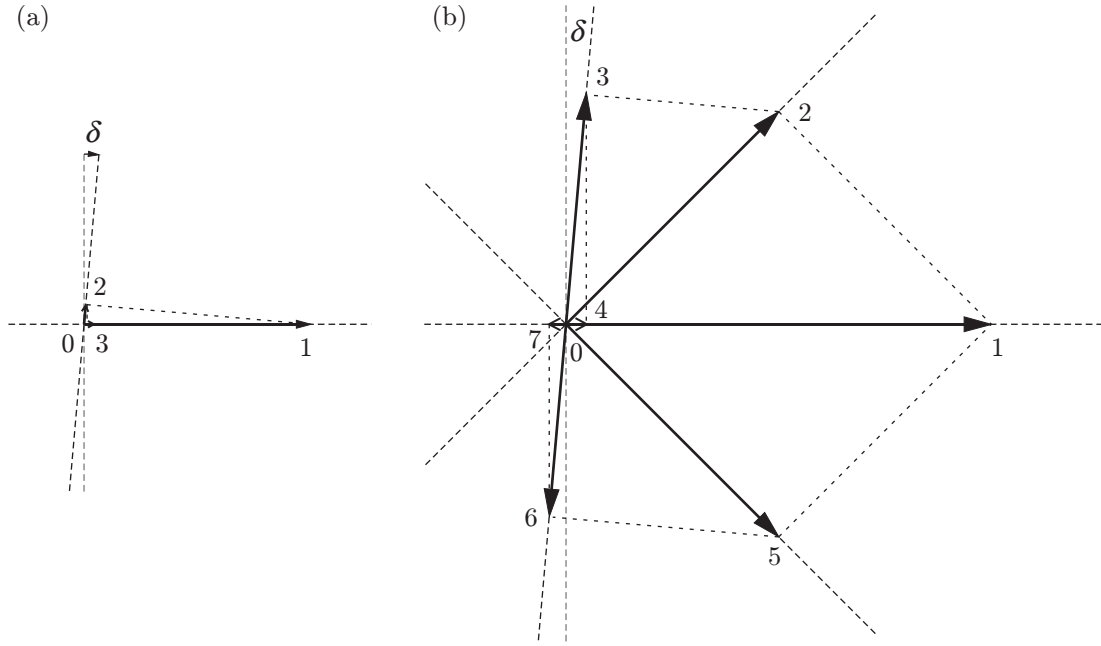


図 3: (a) 直交していた偏光軸をわずかな角  $\delta$  の分だけ傾けると,  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$  の順に射影されたベクトルは元のベクトルの  $\delta^2$  倍程度の大きさになる。(b) 斜め  $45^\circ$  の偏光を中間状態とする射影  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$  は, 元のベクトルの  $\delta$  倍程度の大きさで元と同じ向きのベクトルを与える。 $-45^\circ$  の偏光を中間状態とする射影  $1 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7$  は, 元のベクトルの  $\delta$  倍程度の大きさで元と逆向きのベクトルを与える。

という近似が成り立つ。図 2(a) で直交していた軸をわずかな角  $\delta$  だけ傾けたものが図 3(a) である。図 3(b) で番号 1 を付けられたベクトルは初期状態  $|\psi\rangle$  である。 $+45^\circ$  傾いた中間状態を  $|\xi_{1+}\rangle$ ,  $-45^\circ$  傾いた中間状態を  $|\xi_{1-}\rangle$  とする。直角から  $-\delta$  だけ傾いた終状態を  $|\xi_2\rangle$  とする。図 3(a) に見られるように, 始状態  $|\psi\rangle$  から終状態  $|\xi_2\rangle$  に遷移する全確率 (8.18) は

$$P_{\text{fin}} := \left| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \right|^2 \approx \delta^2 \quad (8.23)$$

となる。中間状態  $|\xi_{1\pm}\rangle$  を指定した“結合確率” (8.19) を, 図 3(b) を見ながら計算する。始状態  $|\psi\rangle$  から中間状態  $|\xi_{1+}\rangle$  を経て終状態  $|\xi_2\rangle$  に遷移する“結合確率”は, 図 3(b) では  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$  の順の射影で与えられ,

$$P_+ := \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx \frac{1}{2}\delta(1 + \delta) \quad (8.24)$$

となる。同様に, 始状態  $|\psi\rangle$  から中間状態  $|\xi_{1-}\rangle$  を経て  $|\xi_2\rangle$  に遷移する“結合確率”は, 図 3(b) の  $1 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7$  の順の射影で与えられ,

$$P_- := \cos\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \delta\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx -\frac{1}{2}\delta(1 - \delta) \quad (8.25)$$

となる。 $\delta$  が正の微小量なら  $P_-$  は負の数である。このとき“条件付き確率”は

$$C_+ := \frac{P_+}{P_{\text{fin}}} \approx \frac{1}{2\delta^2}\delta(1 + \delta) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\delta}\right), \quad (8.26)$$

$$C_- := \frac{P_-}{P_{\text{fin}}} \approx -\frac{1}{2\delta^2}\delta(1 - \delta) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\delta}\right) \quad (8.27)$$

となる。例えば  $\delta = \frac{1}{100}$  ならば、

$$C_+ = \frac{1}{2}(1 + 100) = \frac{101}{2}, \quad C_- = \frac{1}{2}(1 - 100) = -\frac{99}{2} \quad (8.28)$$

となる。つまり、終状態  $|\xi_2\rangle$  に達する途中で状態  $|\xi_{1+}\rangle$  を通過した“条件付き確率”  $C_+$  は絶対値の大きな正の数になり、状態  $|\xi_{1-}\rangle$  を通過した“条件付き確率”  $C_-$  は絶対値の大きな負の数になる。ただし  $C_+ + C_- = 1$  は成り立っている。このような極端な大小関係になるのは、 $P_+$  は  $\delta$  のオーダーの正の数、 $P_-$  は絶対値が  $\delta$  のオーダーの負の数でありながら、和  $P_{\text{fin}} = P_+ + P_-$  は  $\delta^2$  のオーダーの正の数だからだ。

さらに、便宜的に  $a_- < a_+$  として、状態  $|\xi_{1+}\rangle$  を固有値  $a_+$  の固有ベクトル、状態  $|\xi_{1-}\rangle$  を固有値  $a_-$  の固有ベクトルとする物理量  $A^{(1)}$  があると、その“条件付き期待値”（弱値）は

$$\begin{aligned} a_w := \mathbb{E}\left(A^{(1)} \mid |\xi_2\rangle\right) &= C_+ a_+ + C_- a_- = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)a_+ + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\delta}\right)a_- \\ &= \frac{1}{2}(a_+ + a_-) + \frac{1}{2\delta}(a_+ - a_-) \end{aligned} \quad (8.29)$$

となる。 $\delta$  の絶対値が小さいと、弱値 (8.29) は、 $a_- < a_w < a_+$  の範囲に収まらず、極端に大きな値になる。このような条件がそろえば、(8.17) のアハラノフ・アルバート・ヴェイドマンの弱値は、異常に大きな値になり得る。これが弱値の増幅と呼ばれる現象である。この条件では終状態に達する確率  $P_{\text{fin}}$  は非常に小さいので ( $\delta = \frac{1}{100}$  の例では  $P_{\text{fin}} \approx 10^{-4}$ )、測定実験を多数回繰り返して、所望の終状態に達したサンプルを集める必要がある。始状態と終状態とが直交からほんの少しだけずれていて、かすかな信号が検出されるときに、弱値は異常に大きくなることは、定義式 (8.17) からわかることだが、スダルシャンら [40] や細谷氏 [41] も物理的な例を通して示している。

測定の一般論をまとめると、物理量の測定には、おおざっぱに言って、以下の3通りの方法があるようである：

(i) 固有値測定。物理量  $A$  を測って、その固有値  $a_1, a_2, \dots$  のどれかを測定値として得るような測定。シュテルン・ゲルラッハの実験は個々の原子のスピンを測定していると言えるし、スクリーン上の電子の位置測定も固有値測定と言える。現実には、測定値が固有値とぴったり等しいとは限らず、測定誤差を伴うことがある。また、角運動量のように、測定する前から固有値全体の集合が理論的に正確にわかっている物理量もあるし、エネルギー（外場や近接している系からの影響を受けている多体系のハミルトニアン）のように、固有値があらかじめ正確にはわかっていない物理量もある。また、測定データを集計して  $A$  の平均値や分散を求めることもできる。

(ii) 期待値測定。物理量  $A$  の期待値  $\langle \psi | A | \psi \rangle$  を直接的に測るという測定もある。マクロな磁性体の磁化の測定や（NMR も）、マクロな物質の比熱の測定などがこれにあたる。磁化の測定の際に個々の電子のスピンの向きを測定をしているわけではなく、初めからスピンの合計値すなわち期待値を測っている。固有値を繰り返し測定して得たデータの平均値を求めると、多体系の期待値を直接測定するのは、数学的には同等かもしれないが、実際にやっていることは別である。例えば、気体の分子が一つずつ壁に衝突したときに壁に与える力積を

測定して足して平均値を求めるのと、気体の圧力を測定するのは、数学的には同等の結果を与えるはずだが、やっていることが異なるし、系に対する影響も異なる（難易度も異なる）。

(iii) 弱値測定。始状態だけでなく終状態をも選択して、測定器の読み取り値のデータを集計して平均すると、弱値 (8.17) を実験データから求めることができる。ただ、この方法で得られるのは、あくまで平均値であって、「各実験の途中では、実際に、 $A^{(1)}$  の値は  $a_1^{(1)}$  だったのか  $a_2^{(1)}$  だったのか？」という問いに答えることはできない。このことを反映して、途中の値についての確率 (8.16) は負の実数になったり、1 よりも大きな実数になったりもする。従って、確率もどきの (8.16) を頻度解釈するのは無理がある。むしろ (8.16) が負の実数になったり、1 よりも大きな実数になることが、量子論における「実験途中で実測しなかった物理量の値の非実在性」の特徴である。ただ、弱測定も測定の一種であると言い張れば、測定の概念を拡張することによって、実在の概念を拡張することもできる。

実在と非実在の境界は、おおまかには定められるが、シャープな線引きをするのは難しい。私自身は、とりわけ量子ミクロ世界のことがらに対して、古典マクロ世界で我々が培ってきた言語・概念体系を基準にして、何々は実在と言える・何々は実在とは言えない、とジャッジすることは、不毛だと思う。一方で、「何が実在で何が実在ではないかという線引きは、まったく恣意的・便宜的で、どうとでもなる」とは私は思わない。遠目に見れば境界はあるのだが、近寄って見れば境界はおぼろげであり、境界線は、我々のテクノロジーや数理的言語体系に依存して前進したり後退したりするように見える。ミクロ世界に対して我々の自然言語を首尾一貫して適用できず、現実に合わせてようとすると概念体系の使い分けが必要になってしまっても、現実の方に合わせるよりほかないと考える方が、素直だし謙虚であるように思える。量子論自体は首尾一貫した理論なのだが、ミクロ系をマクロ系たる測定器を通して古典物理的な概念体系で記述しようとする、つぎはぎになってしまうのである。そういうふうに、量子系の振る舞いは観測される側面に応じて古典物理の概念体系に投影され、量子系の全体像はそのように投影された複数の像を貼り合わせるによってのみ捉えられることをボーアは相補性と呼んでいた [42]。ボーアの考えは今でも古びておらず、むしろベルの不等式の破れが疑いようもなく顕<sup>あら</sup>わになったいま、ボーアの言っていたことはますます当たっていると思われる。

弱値の概念を受け入たら、ベルの不等式の破れはどう解釈できるのか？ (4.1) で導入した“結合確率”

$$\begin{aligned} P_{ABUV}(a, b, u, v) &= \langle \Psi | \Pi_A(a) \Pi_B(b) \Pi_U(u) \Pi_V(v) | \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | \Pi_A(a) \Pi_U(u) \Pi_B(b) \Pi_V(v) | \Psi \rangle \end{aligned} \quad (8.30)$$

は互いに非可換な、従って同時測定不可能な射影演算子の積の期待値であった。しかし、 $A$  と  $U$  は同時測定可能なので、 $A, U$  の測定値で終状態を定めて、“条件付き確率”

$$P_{BV|AU}(b, v|a, u) = \frac{\langle \Psi | \Pi_A(a) \Pi_U(u) \Pi_B(b) \Pi_V(v) | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Pi_A(a) \Pi_U(u) | \Psi \rangle} \quad (8.31)$$

を理論的に計算することはできるし、“条件付き期待値”

$$\mathbb{E}(BV | a, u) = \frac{\langle \Psi | \Pi_A(a) \Pi_U(u) BV | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Pi_A(a) \Pi_U(u) | \Psi \rangle} \quad (8.32)$$



を実験で測ることもできる。実験の手順としては「 $B$ と $V$ を弱測定しておいて $A$ と $U$ を強測定する」ことにより、(8.32)に相当する数量を測ることができる。実際の実験は難しいが、こうすれば4つの物理量をある意味で“同時に”測定してベルの不等式の破れを観測することができる [43, 44]。つまり、通常の測定方法で物理量 $A$ を測っているときは $B$ の値の実在性はあきらめなければならないし、 $B$ を測っているときは $A$ の値の実在性は放棄すべしというのが、ボーアの相補性であった [45]。しかし、弱測定という視点を通して見て、かつ、負の確率も認めるならば、 $A, B, U, V$ の値が同時に存在しているかのように扱うことができる。ただし、あくまでも統計的期待値における実在性であり、1回1回の実験の途中で $B$ や $V$ の値はいくらであったかということとは言えない。自然言語で言おうとすると、どうしても奇妙な言葉づかいになってしまうが、そのようにしか語れないものが量子系なのだ。

以下のテーマについても増補版執筆予定。

## 9 ベルの不等式が破れる理由

## 10 ベルの伝記

### 参考文献

- [1] 谷村省吾「アインシュタインの夢 ついえる—測っていない値は実在しない」日経サイエンス 2019年2月号 pp.64–71.
- [2] R. ハンソン, K. シャルム (訳者 熊谷玲美, 監修 谷村省吾)「最終決着:「ベルの不等式」の破れの実験」日経サイエンス 2019年2月号 pp.54–62.
- [3] 谷村省吾「揺らぐ境界—非実在が動かす実在」日経サイエンス 2013年7月号 pp.36–45 (別冊日経サイエンス No.199「量子の逆説」(2014年) pp.66–75に再録) . 補足解説が日経サイエンス社ウェブサイトで公開されている: <http://www.nikkei-science.com/?p=37107>
- [4] 谷村省吾「量子論と代数—思考と表現の進化論」数理科学 2018年3月号 pp.42–48. 補足解説がサイエンス社ウェブサイトで公開されている: [http://www.saiensu.co.jp/index.php?page=support\\_details&sup\\_id=511](http://www.saiensu.co.jp/index.php?page=support_details&sup_id=511)
- [5] D. ギリース (中山智香子 訳)「確率の哲学理論」日本経済評論社 (2004).
- [6] E. Schrödinger, “Measurement of length and angle in quantum mechanics”, Nature 173, 442 (1954). この論文でシュレーディンガーは、ダイヤモンドの欠片の大きさや面の角度は、実際に測定することができる物理量だが、それらを表す数学的な演算子があるとは思えない、という疑問を呈している。つまり、量子力学は「すべての観測可能な物理量に、それぞれ対応する演算子がある」ことを前提としているが、果たしてそれは本当か? マクロスケールの物理量も演算子で表されているのか? と問うているのである。
- [7] P. W. Anderson, “More is different”, Science 177, 393–396 (1972).

- [8] N. D. Mermin, “QBism puts the scientist back into science”, *Nature* **507**, 421–423 (2014).
- [9] N. D. Mermin, “Commentary: What I think about Now”, *Physics Today* **67** (3), 8–9 (2014).
- [10] シュレーディンガー 『量子力学の現状』, 湯川・井上編「現代の科学 II」(世界の名著, 第 66 巻) pp.357-408, 中央公論社 (1970). 原文は 1935 年版。いわゆる「シュレーディンガーの猫のパラドクス」を初めて論じた論文。原題(英訳) “The present situation in quantum mechanics” をネットで検索すると英訳された原稿を見つけることができる。訳本の p.377, 第七節には「予測目録としての  $\psi$  関数」という見出しが付けられ, 本文には「 $\psi$  関数とは, 測定値の確率を予言する手段にほかならない」と書かれている。
- [11] G. Jaeger, “Quantum potentiality revisited”, *Philos. Trans. A: Math. Phys. Eng. Sci.* **375**, 20160390 (14pp) (2017).
- [12] R. P. Feynman, “Negative probability”, In Basil J. Hiley and D. Peat (eds.), *Quantum Implications: Essays in Honour of David Bohm*. Methuen. pp.235–248 (1987).  
<http://cds.cern.ch/record/154856/files/pre-27827.pdf>
- [13] M. Ozawa, “Universally valid reformulation of the Heisenberg uncertainty principle on noise and disturbance in measurement”, *Physical Review A* **67**, 042105 (6pp) (2003). 誤差と擾乱の不確定性関係。
- [14] M. Ozawa, “Uncertainty relations for joint measurements of noncommuting observables”, *Phys Lett A* **320**, 367–374 (2004). 2 つの非可換物理量の同時測定における誤差のトレードオフ関係。
- [15] 古田彩「不確定性原理の再出発」; 古田彩「物理学の常識に挑む数学者」; 古田彩「進化する不確定性原理」; 古田彩「誤差って何?」; 別冊日経サイエンス No.199「量子の逆説」(2014 年) pp.18–34 .
- [16] 谷村省吾「メイドインジャパン物理用語：小澤の不等式」パリティ(丸善出版)2016 年 2 月号 p.41. この記事に対する補足解説「多様化する不確定性関係」(68pp) がネットに公開されており, 「多様化する不確定性関係」を検索すればたどりつける：  
<http://www.phys.cs.is.nagoya-u.ac.jp/~tanimura/uncertainty/tanimura-uncertainty-revised.pdf>
- [17] M. Ozawa, “Soundness and completeness of quantum root-mean-square errors”, *Nature Partner Journals, Quantum Information* **5**, 1 (8pp) (2019). 量子論における誤差の定義の変更を提案している。
- [18] M. Ozawa, “Quantum perfect correlations”, *Annals of Physics* **321**, 744–769 (2006).
- [19] C. M. Caves, C. A. Fuchs, and R. Schack, “Quantum probabilities as Bayesian probabilities”, *Physical Review A*, **65**, 022305 (6pp) (2002).
- [20] C. A. Fuchs “QBism, the Perimeter of Quantum Bayesianism”, arXiv: 1003.5209 (2010). この論文の中の (3) 式について Fuchs 自身は The extreme simplicity of this

formula suggests it is the best place for the Quantum Bayesian to seek his motif (この極めて簡潔な公式こそ, QBism の動機を求めるのに最適の場所である) と述べている。が, この公式が一般に成立することは証明されていない。論文中 (5) 式もベイズの公式に似ている。

- [21] H. C. フォン・バイヤー (杉尾一 訳, 木村元 監修) 「Q ビズム—量子力学の新解釈」別冊日経サイエンス No.199 「量子の逆説」(2014 年) pp.84-90 .
- [22] フォン・バイヤー (松浦俊輔 訳, 木村元 解説) 『QBism キュービズム: 量子情報時代の新解釈』森北出版 (2018). この本には, 木村氏による 26 ページに及ぶ解説が収められている。木村氏は解説の中で「行為主体の定義が明確に与えられていない点に問題が残されている」と指摘している (p.210)。また, 「合理的な行為主体の判断は, 結果的に頻度解釈に基づく確率論と一致する」ことを論証するダッチ・ブック論証があるが, 「合理的」であること的前提条件が頻度解釈に依存していることを木村氏は指摘している (p.217)。つまり, 「主観解釈が頻度解釈よりも論理的に先行する」とは, なかなか言えないようである。
- [23] 谷村省吾, 書評「尽きぬ疑問, 絶えない論争, だけど面白い!」(フォン・バイヤー著『QBism キュービズム: 量子情報時代の新解釈』(森北出版)を評する)日経サイエンス 2018 年 6 月号 p.108.
- [24] 谷村省吾「21 世紀の量子論入門, 第 15 回: 観測問題の基本概念」理系への数学 (現代数学社) 2011 年 7 月号 pp.56-61.
- [25] 谷村省吾「波動関数は実在するか—物質的存在ではない. 二つの世界をつなぐ窓口である」数理科学 2013 年 12 月号 pp.14-21. 雑誌『数理科学』に掲載された昔の記事は私のウェブサイト公開してある:  
<http://www.phys.cs.is.nagoya-u.ac.jp/~tanimura/paper/mathsci2013.pdf>
- [26] ニールス・ボーア (山本義隆 編訳) 「因果性と相補性」岩波書店 (1999). この本に収められているボーアの論説は素晴らしくよく考え抜かれて書かれている。ぜひ一度と言わず何度でも読み味わっていただきたいと思う。ボーアの言明をいくつか挙げておこう: 「単一不可分性 (Individuarität): 量子仮説は, 原子的現象のすべての観測には, 観測装置との無視することのできない相互作用が伴うということを意味している. それのために, 現象に対しても, 観測装置に対しても, 従来の物理学の意味における独立した実在性なるものを付与することはできなくなる (pp.20-21)」, 「現象が古典物理学で説明のつく範囲からどれほど外れていても, すべての証拠の説明は古典論の用語で表されなければならないという認識が決定的である. 要するに, 「実験」という言葉で私たちが指しているものは, 私たちが何を行い何を学んだのかを他人に語る事が可能な状況であり, それゆえ, 実験設定や観測結果の説明は, 古典物理学の用語を用いることで曖昧さなく表現されなければならないということにある (p.223)」, 「原子的対象の振る舞いと, その現象が発生する条件を定めるのに用いられる測定装置との相互作用の明確な分離が不可能なことを意味している (p.223)」, 「私は, 現象 (phenomenton) という言葉を, もっぱら, 実験設定全体の記述を含む, 特定された状況の下で得られる観測を指すことにのみ用いられるべきであると提唱した. このような用語法では, 観測問題は何ら難解なものではなくなる (pp.266-267)」

- [27] M. Ozawa, “Quantum measuring processes of continuous observables”, J. Math. Phys. **25**, 79–87 (1984). この論文の (3.9) 式が「波束の収縮」公式。
- [28] M. Ozawa, “Uncertainty relations for noise and disturbance in generalized quantum measurements”, Annals of Physics **311**, 350–416 (2004). この論文の (72) 式が「波束の収縮」公式。
- [29] 谷村省吾「21 世紀の量子論入門, 第 21 回: 遅延選択実験と量子消去」理系への数学 (現代数学社) 2012 年 1 月号 pp.47–53. 測定モデルの枠組みで条件付き確率 (記事中の) (9) 式と条件付き期待値 (10) 式を定義すれば, 理想的な測定の場合, 波束の収縮公式 (17) が導かれる。
- [30] J. Lee and I. Tsutsui, “Quasi-probabilities in conditioned quantum measurement and a geometric/statistical interpretation of Aharonov’s weak value”, Prog. Theor. Exp. Phys. 052A01 (146pp) (2017). Hashed operators という概念を用いて, 無数にある擬確率を特徴付けている。
- [31] A. Fine, “Hidden variables, joint probability, and the Bell inequality,” Phys. Rev. Lett. **48**, 291–295 (1982).
- [32] Y. Aharonov, D. Z. Albert, and L. Vaidman, “How the result of a measurement of a component of the spin of a spin- $\frac{1}{2}$  particle can turn out to be 100,” Phys. Rev. Lett. **60**, 1351–1354 (1988).
- [33] 古田彩「存在確率マイナス 1」; Y. アハラノフ (語り), 古田彩 (聞き手), 鹿野豊・細谷暁夫 (監修)「宇宙の未来が決める現在」; 井元信之・横田一広「量子の“開かずの間”をのぞき見る」: 日経サイエンス 2009 年 10 月号 pp.22–35 (別冊日経サイエンス 186 号「実在とは何か?」(2012 年) pp.46–59 に再録)。粒子がある経路を通る確率が  $-1$  であると考えざるを得ない現象も, アハラノフの弱値概念を使えば“理論どおり”に説明できる。
- [34] 細谷暁夫「光子の裁判」再び—波乃光子は本当に無罪か」; Y. アハラノフ (語り), 古田彩 (聞き手), 鹿野豊 (監修)「光子は未来を知っている」: 別冊日経サイエンス No.199「量子の逆説」(2014 年) pp.40–51, pp.60–63 .
- [35] S. Pancharatnam, “Generalized theory of interference, and its applications”, Proc. Ind. Acad. Sci. A **44**, 247–262 (1956).  
[http://www-old.ias.ac.in/j\\_archive/proca/44/5/247-262/viewpage.html](http://www-old.ias.ac.in/j_archive/proca/44/5/247-262/viewpage.html)
- [36] 谷村省吾「トムとベリー: 量子力学および古典力学の微分幾何学的側面とゲージ理論について」素粒子論研究 85 巻 1 号, 1–89 (1992 年 4 月). ベリーの位相に関する般論と具体例を提示している。パンチャラトナムの位相についても解説あり。  
[https://www.jstage.jst.go.jp/article/soken/85/1/85\\_KJ00004707115/\\_article/-char/ja/](https://www.jstage.jst.go.jp/article/soken/85/1/85_KJ00004707115/_article/-char/ja/)
- [37] S. Tamate, H. Kobayashi, T. Nakanishi, K. Sugiyama, and M Kitano, “Geometrical aspects of weak measurements and quantum erasers”, New Journal of Physics **11**, 093025 (11pp) (2009).

- [38] H. Kobayashi, S. Tamate, T. Nakanishi, K. Sugiyama, and M. Kitano, “Observation of geometric phases in quantum erasers”, J. Phys. Soc. Jpn. **80**, 034401 (6pp) (2011).
- [39] 谷村省吾「光子の逆説」日経サイエンス 2012年3月号 pp.32–43（別冊日経サイエンス No.199「量子の逆説」pp.6–17に再録。とくにこの中の p.11 と p.15 の図説を参照）。
- [40] I. M. Duck, P. M. Stevenson, and E. C. G. Sudarshan, “The sense in which a weak measurement of a spin- $\frac{1}{2}$  particle’s spin component yields a value 100,” Phys. Rev. D **40**, 2112–2117 (1989). Aharonov らの論文 [32] の謎解き・解説論文。
- [41] 細谷暁夫「「光子の裁判」再び—波乃光子は本当に無罪か」日経サイエンス 2014年1月号 pp.34–43（別冊日経サイエンス No.199「量子の逆説」(2014年) pp.42–51に再録）。詳しい計算も書かれた補足解説「ヤングの2重スリットの実験と「弱値」」がウェブに公開されている：<http://www.nikkei-science.com/?p=39695>
- [42] ニールス・ボーア（山本義隆 編訳）「因果性と相補性」岩波書店（1999）（再掲）。「記号的な作用素が非可換であるということは、そのそれぞれに対応する物理量の正確な定義を可能とするような実験設定が相互に背反的であるということを通じて反映しているのである（p.308）」、「相補性 (Komplementarität)：一見したところその共存が科学の基本原則とは相容れないように見える新しい諸法則に対して、物理学の法則としての地位を与えているのは、もっぱら相補的な物理量の曖昧さのない定義を可能とする二つの実験手続きが互いに排他的であることのみによる（p.114）」、「考察している対象の振る舞いに関して、異なる設定の実験によって私たちが手に入れる、見かけ上は互いに相容れない情報は、明らかに従来のやり方では相互に関係付けることはできないけれども（経験全体の包括的な説明にとっては同様に欠かすことのできないものであって、）それらは互いに相補的であると見なし得るのです（p.124）」
- [43] H. F. Hofmann, “On the resolution of quantum paradoxes by weak measurements,” arXiv: 0911.0071 (2009). 弱値を用いて、負の確率を定義し、ベル不等式の破れを説明した。「ベル不等式の破れは、局所性を否定しているのではなく、実在を否定しているのだ」という見解はこの論文にも書かれている。
- [44] B. L. Higgins, M. S. Palsson, G. Y. Xiang, H. M. Wiseman, and G. J. Pryde, “Using weak values to experimentally determine “negative probabilities” in a two-photon state with Bell correlations”, Physical Review A **91**, 012113 (8pp) (2015). ベル不等式が破れる状況で負の確率を弱測定の方法で測ったという報告。この論文は最初 2011年に電子アーカイブ (arXiv: 1112.3664) に公開され、2012年に Physical Review A に投稿された後、2015年によく掲載されている。
- [45] ニールス・ボーア（山本義隆 編訳）「因果性と相補性」岩波書店（1999）（再々掲）。アインシュタインら（EPR）の問いかけに対するボーアの答えの中の次の言葉は、測らなかつた（測れなかつた）物理量の仮定法的な値の非実在性を言い当てている：「実際、私たちは、固有の量子現象の研究に適したそれぞれの設定の実験においては、ある物理量の値について、ただたんに無知であるだけでなく、それらの量を一義的に定義することさえも不可能なのである（p.111）」