第 1 版　2018 年 12 月 26 日

『アインシュタインの夢 ついえる：測っていない値は実在しない』を読んで，もっと理解したいと思った人のための補足解説

谷村 省吾
名古屋大学大学院情報学研究科

1　この文章の位置付け

この文章は，日経サイエンス 2019 年 2 月号，特集「量子もつれ実証」[1, 2] に掲載された記事『アインシュタインの夢 ついえる―測っていない値は実在しない』（以下，本誌・本記事と言う）に対する補足解説です。本誌面では説明しなかった詳細，とくに数学的証明と歴史に関する解説を補います。一度に全部の論点について解説を書き切れないので，何回かに分けて公表しようと思います。

いまのところ以下のような話題を扱うことを計画しています：(1) ベル不等式を破るような予測を量子論はどうやって出すのか。(2) 量子論から負の確率をどうやって出すのか。(3) 量子論がベル不等式を破る根本的な理由は何か。(4) ジョン・スチュアート・ベルの詳しい伝記。

また，本記事を読んでいただいた方から twitter[1]などを通してご質問を寄せていただければ，答えを公表するのが適切な場合には，追加の補足解説の中で私が答えられる範囲でお答えしたいと思います。

2　ベルの不等式の復習

ベルの不等式は次のように述べられる。A, B, U, V という 4 種類の物理量があるとする。これらを測ると 1 または -1 のどちらかの値が得られる。± 1 の値はランダムに現れるように見える。「A の値は a であり（a には 1 か -1 があてはまる），かつ，B の値は b であり，かつ，U の値は u であり，かつ，V の値は v である確率 $P(a, b, u, v)$ が 0 以上 1 以下の実数値として存在していること」を仮定する。

物理量 A, B, U, V のうち，A と U，あるいは A と V，あるいは B と U，あるいは B と V の組は一度に測ることができる。実験状況としては，似たような（同じ確率分布に従うと思われる）粒子系を繰り返し生成し，例えば A と U の値を同時に測って（厳密に同時である必要はない），測定値を掛け算して AU の値を求める。粒子系が生成されるたびに同様の測定を行う。測定ごとに A と U の値は ± 1 のどちらかに揺れており，掛け算 AU の値も 1 であったり -1 であったりするが，そのような測定結果を集めて AU の平均値 $\langle AU \rangle$ を求める。

[1] Twitter アカウント：tani6s

測定する物理量の組を替えて，同様に，平均値 $\langle AV\rangle$，$\langle BU\rangle$，$\langle BV\rangle$ も求める。これらを足したり引いたりして

$$\langle S\rangle := \langle AU\rangle + \langle AV\rangle + \langle BU\rangle - \langle BV\rangle \tag{2.1}$$

を定める。以上の前提のもとで

$$-2 \le \langle S\rangle \le 2 \tag{2.2}$$

が成り立つ。これをベルの不等式，あるいは，CHSH の不等式という。

この不等式の証明は，本誌にも書いたし，前作の補足解説 [3] （“「揺らぐ境界—非実在が動かす実在」を読んでいろいろ疑問が湧いた人のための補足” の 3.3 節）にも書いたので，ここには繰り返さない。ただ，ベルの不等式自体の証明は簡単明瞭で，一度納得したら，この不等式が成り立たないことがあるとは思えないくらいである。

3　量子論の正しい計算

量子論においては，物理量は線形演算子（行列）で表され，物理系の状態はヒルベルト空間の単位ベクトルまたは密度行列で表される。「表される」という言葉には解釈が必要なのだが，それは追って説明することにする。

スピンという物理量は，測れば 1 か -1 のどちらかの値を示すものである。量子力学では 1 個の粒子のスピンはパウリ行列と呼ばれる 3 通りの行列

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

で表される。これらの行列はどれも固有値が ± 1 である。また，2 行 2 列の単位行列

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

を定めておくと便利である。2 個の粒子のスピンは，こういった行列のテンソル積で表される。とくにベルの不等式の検証の際に選ばれる物理量は

$$A = \sigma_z \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

$$B = \sigma_x \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

$$U = I_2 \otimes \frac{-1}{\sqrt{2}}(\sigma_z + \sigma_x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

$$V = I_2 \otimes \frac{-1}{\sqrt{2}}(\sigma_z - \sigma_x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

と表現される．これらの行列の固有値もまた ± 1 である。注目してほしい点は，行列の積に関して **$AB = BA$ が成り立たないし，$UV = VU$ も成り立たない**という点である。数学的には，**A と B は非可換であり，同時固有ベクトルが存在しない。**このことは物理的には **A と B の値が同時に確定している状態はない**と解釈される。同様に，**U と V の値が同時に確定している状態もない。**

一方で A と U の行列の積に関しては $AU = UA$ が成り立つ。だから A と U の値が同時に確定している状態が存在するし，A と U の値を同時測ったときの測定値の出現確率を計算することもできる。同様に $AV = VA$，$BU = UB$，$BV = VB$ も成り立つ。非可換なのは A と B，U と V だけである。

量子論における確率計算の方法を示す。A の測定値が a かつ U の測定値が u となる確率を $P_{AU}(a,u)$ と書く。変数 a,u には 1 または -1 があてはまる。$a = \pm 1$ なので $a^2 = 1$ としてよい。ここで

$$E_A(a) := \frac{A+a}{a+a} = \frac{1}{2}(aA+1) \tag{3.7}$$

とおくと，A の値が a ならば $E_A(a) = 1$ であるし，A の値が $-a$ ならば $E_A(a) = 0$ である。同様に

$$E_U(u) := \frac{U+u}{u+u} = \frac{1}{2}(uU+1) \tag{3.8}$$

を定めておく。粒子系の状態ベクトルを $|\Psi\rangle$ とする。量子論は確率 $P_{AU}(a,u)$ を

$$\begin{aligned} P_{AU}(a,u) &= \langle\Psi|E_A(a)E_U(u)|\Psi\rangle \\ &= \frac{1}{2^2}\langle\Psi|(1+aA)(1+uU)|\Psi\rangle \end{aligned} \tag{3.9}$$

で与える。同様に，

$$E_B(b) := \frac{B+b}{b+b} = \frac{1}{2}(bB+1), \qquad E_V(v) := \frac{V+v}{v+v} = \frac{1}{2}(vV+1) \tag{3.10}$$

とおけば，A の測定値が a かつ V の測定値が v となる確率 $P_{AV}(a,v)$，B の測定値が b かつ U の測定値が u となる確率 $P_{BU}(b,u)$，B の測定値が b かつ V の測定値が v となる確率 $P_{BV}(b,v)$ は，それぞれ

$$P_{AV}(a,v) = \langle\Psi|E_A(a)E_V(v)|\Psi\rangle = \frac{1}{2^2}\langle\Psi|(1+aA)(1+vV)|\Psi\rangle \tag{3.11}$$

$$P_{BU}(b,u) = \langle\Psi|E_B(b)E_U(u)|\Psi\rangle = \frac{1}{2^2}\langle\Psi|(1+bB)(1+uU)|\Psi\rangle \tag{3.12}$$

$$P_{BV}(b,v) = \langle\Psi|E_B(b)E_V(v)|\Psi\rangle = \frac{1}{2^2}\langle\Psi|(1+bB)(1+vV)|\Psi\rangle \tag{3.13}$$

から計算できる。

具体的な計算を完了するためには状態ベクトル $|\Psi\rangle$ を指定する必要がある。σ_z の固有値 1 あるいは -1 に属する固有ベクトルを「スピン上向き」あるいは「スピン下向き」の状態といい，それぞれ

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

と書く。ベルの不等式の検証実験では

$$\begin{aligned}
|\Psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

という 2 粒子状態が用意される。これこそが，**量子もつれ状態（エンタングル状態）**と呼ばれるものである。あとは確率の定義式 (3.9), (3.11), (3.12), (3.13) に各物理量の定義式 (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) と状態ベクトルの式 (3.15) を入れれば，それぞれの確率を求められる。確率 $P_{AU}(a,u)$ の式を展開すると

$$\begin{aligned}
P_{AU}(a,u) &= \langle\Psi|E_A(a)E_U(u)|\Psi\rangle \\
&= \frac{1}{2}\Big\{\langle\uparrow|E_A(a)|\uparrow\rangle\langle\downarrow|E_U(u)|\downarrow\rangle - \langle\uparrow|E_A(a)|\downarrow\rangle\langle\downarrow|E_U(u)|\uparrow\rangle \\
&\qquad -\langle\downarrow|E_A(a)|\uparrow\rangle\langle\uparrow|E_U(u)|\downarrow\rangle + \langle\downarrow|E_A(a)|\downarrow\rangle\langle\uparrow|E_U(u)|\uparrow\rangle\Big\} \\
&= \frac{1}{2^3}\Big\{(1+a)\cdot(1+\frac{1}{\sqrt{2}}u) - (0+0)\cdot(0-\frac{1}{\sqrt{2}}u) \\
&\qquad -(0+0)\cdot(0-\frac{1}{\sqrt{2}}u) + (1-a)\cdot(1-\frac{1}{\sqrt{2}}u)\Big\} \\
&= \frac{1}{2^3}\Big\{(1+a)\cdot(1+\frac{1}{\sqrt{2}}u) + (1-a)\cdot(1-\frac{1}{\sqrt{2}}u)\Big\} \\
&= \frac{1}{2^2}\Big\{1+\frac{1}{\sqrt{2}}au\Big\}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

となる。関数値を具体的に計算すると

$$P_{AU}(1,1) = P_{AU}(-1,-1) = \frac{1}{2^2}\Big(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = \frac{2+\sqrt{2}}{2^3} = 0.42677\cdots \tag{3.17}$$

$$P_{AU}(1,-1) = P_{AU}(-1,1) = \frac{1}{2^2}\Big(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = \frac{2-\sqrt{2}}{2^3} = 0.07322\cdots \tag{3.18}$$

となる。この計算結果が本記事 p.69 の左の表に掲載されている。他の物理量の組み合わせ

に対する測定値の出現確率の式も大した違いはない：

$$
\begin{aligned}
P_{AV}(a,v) &= \langle\Psi|E_A(a)E_V(v)|\Psi\rangle \\
&= \frac{1}{2}\Big\{\langle\uparrow|E_A(a)|\uparrow\rangle\langle\downarrow|E_V(v)|\downarrow\rangle - \langle\uparrow|E_A(a)|\downarrow\rangle\langle\downarrow|E_V(v)|\uparrow\rangle \\
&\quad -\langle\downarrow|E_A(a)|\uparrow\rangle\langle\uparrow|E_V(v)|\downarrow\rangle + \langle\downarrow|E_A(a)|\downarrow\rangle\langle\uparrow|E_V(v)|\uparrow\rangle\Big\} \\
&= \frac{1}{2^3}\Big\{(1+a)\cdot(1+\frac{1}{\sqrt{2}}v) - (0+0)\cdot(0+\frac{1}{\sqrt{2}}v) \\
&\quad -(0+0)\cdot(0+\frac{1}{\sqrt{2}}v) + (1-a)\cdot(1-\frac{1}{\sqrt{2}}v)\Big\} \\
&= \frac{1}{2^3}\Big\{(1+a)\cdot(1+\frac{1}{\sqrt{2}}v) + (1-a)\cdot(1-\frac{1}{\sqrt{2}}v)\Big\} \\
&= \frac{1}{2^2}\Big\{1+\frac{1}{\sqrt{2}}av\Big\}, \qquad (3.19) \\
P_{BU}(b,u) &= \langle\Psi|E_B(b)E_U(u)|\Psi\rangle \\
&= \frac{1}{2}\Big\{\langle\uparrow|E_B(b)|\uparrow\rangle\langle\downarrow|E_U(u)|\downarrow\rangle - \langle\uparrow|E_B(b)|\downarrow\rangle\langle\downarrow|E_U(u)|\uparrow\rangle \\
&\quad -\langle\downarrow|E_B(b)|\uparrow\rangle\langle\uparrow|E_U(u)|\downarrow\rangle + \langle\downarrow|E_B(b)|\downarrow\rangle\langle\uparrow|E_U(u)|\uparrow\rangle\Big\} \\
&= \frac{1}{2^3}\Big\{(1+0)\cdot(1+\frac{1}{\sqrt{2}}u) - (0+b)\cdot(0-\frac{1}{\sqrt{2}}u) \\
&\quad -(0+b)\cdot(0-\frac{1}{\sqrt{2}}u) + (1+0)\cdot(1-\frac{1}{\sqrt{2}}u)\Big\} \\
&= \frac{1}{2^3}\Big\{(1+\frac{1}{\sqrt{2}}u) + (1-\frac{1}{\sqrt{2}}u) + 2b\frac{1}{\sqrt{2}}u\Big\} \\
&= \frac{1}{2^2}\Big\{1+\frac{1}{\sqrt{2}}bu\Big\}, \qquad (3.20) \\
P_{BV}(b,v) &= \langle\Psi|E_B(b)E_V(v)|\Psi\rangle \\
&= \frac{1}{2}\Big\{\langle\uparrow|E_B(b)|\uparrow\rangle\langle\downarrow|E_V(v)|\downarrow\rangle - \langle\uparrow|E_B(b)|\downarrow\rangle\langle\downarrow|E_V(v)|\uparrow\rangle \\
&\quad -\langle\downarrow|E_B(b)|\uparrow\rangle\langle\uparrow|E_V(v)|\downarrow\rangle + \langle\downarrow|E_B(b)|\downarrow\rangle\langle\uparrow|E_V(v)|\uparrow\rangle\Big\} \\
&= \frac{1}{2^3}\Big\{(1+0)\cdot(1+\frac{1}{\sqrt{2}}v) - (0+b)\cdot(0+\frac{1}{\sqrt{2}}v) \\
&\quad -(0+b)\cdot(0+\frac{1}{\sqrt{2}}v) + (1+0)\cdot(1-\frac{1}{\sqrt{2}}v)\Big\} \\
&= \frac{1}{2^3}\Big\{(1+\frac{1}{\sqrt{2}}v) + (1-\frac{1}{\sqrt{2}}v) - 2b\frac{1}{\sqrt{2}}v\Big\} \\
&= \frac{1}{2^2}\Big\{1-\frac{1}{\sqrt{2}}bv\Big\}. \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

従って $P_{BV}(b,v)$ の式だけが他の式とは同型ではない。確率の値は

$$P_{BV}(1,1) = P_{BV}(-1,-1) = \frac{1}{2^2}\Big(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = \frac{2-\sqrt{2}}{2^3} = 0.07322\cdots \qquad (3.22)$$

$$P_{BV}(1,-1) = P_{BV}(-1,1) = \frac{1}{2^2}\Big(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = \frac{2+\sqrt{2}}{2^3} = 0.42677\cdots \qquad (3.23)$$

となる。**同時測定可能な物理量については測定値の出現確率が負になることはない。**

ここまで来れば，各物理量の平均値を求めることはたやすい。確率 $P_{AU}(a,u)$ の式 (3.16) より AU の平均値は

$$\langle AU\rangle = \sum_{a,u=\pm1} au\,P_{AU}(a,u) = \sum_{a,u=\pm1} au\,\frac{1}{2^2}\Big\{1+\frac{1}{\sqrt{2}}au\Big\} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.70710\cdots \tag{3.24}$$

となる。$\langle AV\rangle$, $\langle BU\rangle$ もこれと同じ値である。確率 $P_{BV}(b,v)$ の式 (3.21) より BV の平均値は

$$\langle BV\rangle = \sum_{b,v=\pm1} bv\,P_{BV}(b,v) = \sum_{b,v=\pm1} bv\,\frac{1}{2^2}\Big\{1-\frac{1}{\sqrt{2}}bv\Big\} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -0.70710\cdots \tag{3.25}$$

となる。これらより，式 (2.1) で定めた $\langle S\rangle$ の値は

$$\langle S\rangle = \langle AU\rangle + \langle AV\rangle + \langle BU\rangle - \langle BV\rangle = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} = 2.82842\cdots \tag{3.26}$$

となる。これが量子論的に正しい結果であるが，ベルの不等式 (2.2), $-2 \le \langle S\rangle \le 2$ の範囲外の値になっている。

なお，古典論では S の値は ±2 になり，量子論では S の値は 0 または $\pm2\sqrt{2}$ になることは，ヒルベルト空間を用いない代数的方法だけでも証明できる [4]。

4 量子論で負の確率を求める

量子論の式を変則的に用いれば，同時測定**不可能**な物理量についても値の "存在確率" を定めることができる。ただ，そのような物理量の組の測定は原理的にできないので,「測定値の出現確率」と呼ぶのは不適当である。そういう意味では，いまから計算するものは「確率もどき」と呼ぶのがふさわしいかもしれない。

そのような "反則" を覚悟して,「A の値が a，かつ B の値が b，かつ U の値が u，かつ V の値が v」となる確率 $P_{ABUV}(a,b,u,v)$ の定義式として

$$\begin{aligned} P_{ABUV}(a,b,u,v) &:= \langle\Psi|E_A(a)E_B(b)E_U(u)E_V(v)|\Psi\rangle \\ &= \frac{1}{2^4}\langle\Psi|(1+aA)(1+bB)(1+uU)(1+vV)|\Psi\rangle \\ &= \frac{1}{2^4}\langle\Psi|(1+aA+bB+abAB)(1+uU+vV+uvUV)|\Psi\rangle \end{aligned} \tag{4.1}$$

を提案する。この式は (3.9) の自然な拡張になっている。しかも，すでに定義した (3.9), (3.11), (3.12), (3.13) に対して

$$\sum_{b=\pm1}\sum_{v=\pm1} P_{ABUV}(a,b,u,v) = P_{AU}(a,u), \tag{4.2}$$

$$\sum_{b=\pm1}\sum_{u=\pm1} P_{ABUV}(a,b,u,v) = P_{AV}(a,v), \tag{4.3}$$

$$\sum_{a=\pm1}\sum_{v=\pm1} P_{ABUV}(a,b,u,v) = P_{BU}(b,u), \tag{4.4}$$

$$\sum_{a=\pm1}\sum_{u=\pm1} P_{ABUV}(a,b,u,v) = P_{BV}(b,v) \tag{4.5}$$

が成り立っているので，形式的には，$P_{ABUV}(a,b,u,v)$ は $P_{AU}(a,u)$, $P_{AV}(a,v)$, $P_{BU}(b,u)$, $P_{BV}(b,v)$ を周辺確率とする結合確率になっている。ただ，射影演算子の積 $E_A(a)E_B(b)$ は射影演算子ではないので，$P_{ABUV}(a,b,u,v)$ が非負の実数値になる保証はないし，$E_A(a)E_B(b) \neq E_B(b)E_A(a)$ なので $\langle\Psi|E_A(a)E_B(b)E_U(u)E_V(v)|\Psi\rangle$ と $\langle\Psi|E_B(b)E_A(a)E_U(u)E_V(v)|\Psi\rangle$ は等しいとは言えない。それに対して，$E_A(a)E_U(u)$ は射影演算子であり，$E_A(a)E_U(u) = E_U(u)E_A(a)$ が成り立ち，$\langle\Psi|E_A(a)E_U(u)|\Psi\rangle = \langle\Psi|E_U(u)E_A(a)|\Psi\rangle$ は非負の実数値となる。

計算途中に現れる演算子は

$$AB = (\sigma_z\sigma_x) \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

$$UV = I_2 \otimes \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x)(\sigma_z - \sigma_x) = -I_2 \otimes (\sigma_z\sigma_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

である。状態ベクトルは (3.15) として，確率もどきの式 (4.1) を展開すると

$$\begin{aligned}
P_{ABUV}(a,b,u,v) &= \frac{1}{2^5}\Big\{\langle\uparrow|(1+aA+bB+abAB)|\uparrow\rangle\langle\downarrow|(1+uU+vV+uvUV)|\downarrow\rangle \\
&\quad -\langle\uparrow|(1+aA+bB+abAB)|\downarrow\rangle\langle\downarrow|(1+uU+vV+uvUV)|\uparrow\rangle \\
&\quad -\langle\downarrow|(1+aA+bB+abAB)|\uparrow\rangle\langle\uparrow|(1+uU+vV+uvUV)|\downarrow\rangle \\
&\quad +\langle\downarrow|(1+aA+bB+abAB)|\downarrow\rangle\langle\uparrow|(1+uU+vV+uvUV)|\uparrow\rangle\Big\} \\
&= \frac{1}{2^5}\Big\{(1+a+b0+ab0)\cdot(1+\frac{1}{\sqrt{2}}u+\frac{1}{\sqrt{2}}v+uv0) \\
&\quad -(0+a0+b+ab)\cdot(0-\frac{1}{\sqrt{2}}u+\frac{1}{\sqrt{2}}v+uv) \\
&\quad -(0+a0+b-ab)\cdot(0-\frac{1}{\sqrt{2}}u+\frac{1}{\sqrt{2}}v-uv) \\
&\quad +(1-a+b0+ab0)\cdot(1-\frac{1}{\sqrt{2}}u-\frac{1}{\sqrt{2}}v+uv0)\Big\} \\
&= \frac{1}{2^5}\Big\{(1+a)\cdot(1+\frac{1}{\sqrt{2}}u+\frac{1}{\sqrt{2}}v) \\
&\quad -(b+ab)\cdot(-\frac{1}{\sqrt{2}}u+\frac{1}{\sqrt{2}}v+uv) \\
&\quad -(b-ab)\cdot(-\frac{1}{\sqrt{2}}u+\frac{1}{\sqrt{2}}v-uv) \\
&\quad +(1-a)\cdot(1-\frac{1}{\sqrt{2}}u-\frac{1}{\sqrt{2}}v)\Big\} \\
&= \frac{1}{2^4}\Big\{1+\frac{1}{\sqrt{2}}a(u+v)+\frac{1}{\sqrt{2}}b(u-v)-abuv\Big\}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

となる。例えば $a=1$, $b=1$, $u=-1$, $v=-1$ となる確率は,

$$\begin{aligned}
P_{ABUV}(1,1,-1,-1) &= \frac{1}{2^4}\Big\{1-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2+0-1\Big\} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2^4} = -0.08838\cdots
\end{aligned} \tag{4.9}$$

のとおり，負の値になる。式 (4.8) は

$$P_{ABUV}(a,b,u,v) = \frac{1}{2^4}\Big\{1-abuv+\frac{1}{\sqrt{2}}(au+av+bu-bv)\Big\} \tag{4.10}$$

とも書ける。$au+av+bu-bv=2$ かつ $abuv=1$ の場合は

$$P_{ABUV}(a,b,u,v)=\frac{1}{2^4}\left\{1-1+\frac{2}{\sqrt{2}}\right\}=\frac{\sqrt{2}}{2^4}=0.08838\cdots\,, \tag{4.11}$$

$au+av+bu-bv=2$ かつ $abuv=-1$ の場合は

$$P_{ABUV}(a,b,u,v)=\frac{1}{2^4}\left\{1+1+\frac{2}{\sqrt{2}}\right\}=\frac{2+\sqrt{2}}{2^4}=0.21338\cdots\,, \tag{4.12}$$

$au+av+bu-bv=-2$ かつ $abuv=1$ の場合は

$$P_{ABUV}(a,b,u,v)=\frac{1}{2^4}\left\{1-1-\frac{2}{\sqrt{2}}\right\}=-\frac{\sqrt{2}}{2^4}=-0.08838\cdots\,, \tag{4.13}$$

$au+av+bu-bv=-2$ かつ $abuv=-1$ の場合は

$$P_{ABUV}(a,b,u,v)=\frac{1}{2^4}\left\{1+1-\frac{2}{\sqrt{2}}\right\}=\frac{2-\sqrt{2}}{2^4}=0.03661\cdots \tag{4.14}$$

となる。確率 $P_{ABUV}(a,b,u,v)$ が負になるのは $au+av+bu-bv=-2$ かつ $abuv=1$ の場合に限られることがわかる。こうして本記事 p.69 の右の表のすべての確率が計算できた。

式 (4.10) と周辺確率の定義式 (4.2), (4.3), (4.4), (4.5) から，量子論で求めた式 (3.16), (3.19), (3.20), (3.21) が再現できる。

以下のテーマについても増補版執筆予定。

5 ベルの不等式が破れる理由

6 ベルの伝記

参考文献

[1] 谷村省吾「アインシュタインの夢 ついえる—測っていない値は実在しない」日経サイエンス 2019 年 2 月号 pp.64–71.

[2] R. ハンソン，K. シャルム（訳者 熊谷玲美，監修 谷村省吾）「最終決着：「ベルの不等式」の破れの実験」日経サイエンス 2019 年 2 月号 pp.54–62.

[3] 谷村省吾「揺らぐ境界—非実在が動かす実在」日経サイエンス 2013 年 7 月号 pp.36-45（別冊日経サイエンス No.199「量子の逆説」pp.66-75 に再録）．補足解説が日経サイエンス社ウェブサイトで公開されている：`http://www.nikkei-science.com/?p=37107`

[4] 谷村省吾「量子論と代数—思考と表現の進化論」数理科学 2018 年 3 月号 pp.42–48. 補足解説がサイエンス社ウェブサイトで公開されている：
`http://www.saiensu.co.jp/index.php?page=support_details&sup_id=511`